

Elektromagnetische Wellen: Gelöste und ungelöste inverse Probleme*

Rainer Kress

1 Begrüßung

Unter dem Rektorat des Mediziners Hanno Poppe und dem Dekanat des Biologen Gerhard Wagenitz habe ich am 24. Juni 1972 hier in dieser Aula meine Antrittsvorlesung gehalten. Die technische Ausstattung war etwas schlichter, eine kleine Stelltafel mit dem Ausmaß von 2 qm ließ keine mathematische Fachvorlesung zu. Daher habe ich unter dem Titel *Angewandte oder anwendbare Mathematik* einen Diskussionsbeitrag vorgestellt zum Verhältnis von reiner und angewandter Mathematik. An dessen Ende habe ich unter anderem festgehalten:

Die Mathematik verdankt ihre allgemeine Wertschätzung ihrer bedeutenden Rolle für die Anwendungen. Dies gibt uns die Verpflichtung, die Anwendbarkeit der Mathematik weiter zu pflegen. Die Mathematik kann sich nicht erschöpfen in der alleinigen Entwicklung von Theorien, wir haben auch die Aufgabe durch Anwendung der Mathematik in anderen Wissenschaften und Lebensbereichen bei der Lösung aktueller konkreter Probleme mitzuwirken. Die Mathematik hat durch die Axiomatisierung und ihre Eigenschaft, in verstärktem Maße eine Wissenschaft von Strukturen geworden zu sein, neue Kraft gewonnen und sich neue Möglichkeiten eröffnet, andere Wissenschaften und Lebensbereiche zu mathematisieren und so zur Bewältigung von Problemen beizutragen. Ich meine, wir sollten diese Chance nutzen, indem wir Mathematik als Einheit von reiner und anwendbarer Mathematik verstehen, in steter Wechselwirkung zwischen Theorie und Praxis.

Mit der heutigen Abschiedsvorlesung möchte ich aufzeigen, dass ich die

*Abschiedsvorlesung vom 27. Januar 2010

Verpflichtung, als Mathematiker an der Anwendbarkeit der Mathematik mitzuwirken, in Forschung und Lehre ernst genommen habe.

Vorher möchte ich Sie, meine Damen und Herren, alle ganz herzlich hier willkommen heißen. Ich danke Ihnen, Herr Vizepräsident Münch, und Ihnen, Frau Dekanin Kersten, und Ihnen, Herr Hohage, für die freundlichen und bewegenden Worte. Dabei gestatte ich mir eine kleine Korrektur. Entsprechend dem Wahlspruch der 68er: Vertraue keinem über 30, hat die Universität Göttingen mich im Alter von 29 berufen und zum ordentlichen Professor ernannt. Insbesondere begrüße ich alle Gäste, die eigens nach Göttingen angereist sind. Ganz besonders herzlich begrüße ich meinen akademischen Lehrer, meinen Doktorvater Erich Martensen. Lieber Herr Martensen, ich werde versuchen, Ihrem Vorbild in der Interpretation des Standes eines Emeritus zu folgen.



Ich begrüße die Gäste, die aus dem Ausland angereist sind: Roman Chapko aus der Ukraine und Roland Potthast aus England. Aus den USA begrüße ich meinen langjährigen Freund und Kollegen David Colton. Mit ihm verbindet mich eine über mehr als 30 Jahre währende erfolgreiche wissenschaftliche Zusammenarbeit. Das auf einer internationalen Tagung in Griechenland vor wenigen Jahren aufgenommene Photo zeigt, dass wir mit uns zufrieden sind. Da diese Zusammenarbeit ohne jegliche Kooperationsvereinbarungen ausgekommen ist, betrachte ich sie auch als Beleg für die These, dass zu erfolgreicher wissenschaftlicher Arbeit die Übereinstimmung der Forschungsinteressen und die persönlichen Affinitäten der beteiligten Wissenschaftler wesentlich mehr Bedeutung haben als formale Kooperationsvereinbarungen.

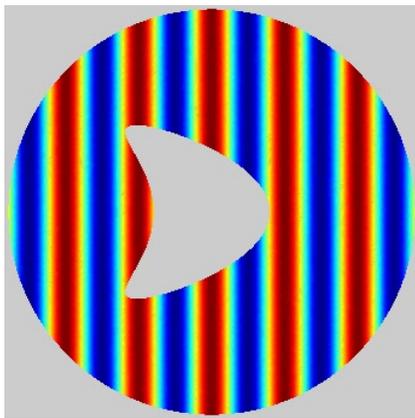
Da dies eine Vorlesung ist, begrüße ich insbesondere die Studentinnen und Studenten und vor allem meine ehemaligen und aktuellen Doktorandinnen und Doktoranden. At this point I also have to apologize to the people in the audience having difficulties with the German language. However extending the rule stated by Guido Westerwelle, the German minister for foreign affairs, press conferences of the free democratic party and farewell lectures at German universities are held in German.

Besonders begrüße ich natürlich die wenigen unter Ihnen, die schon vor

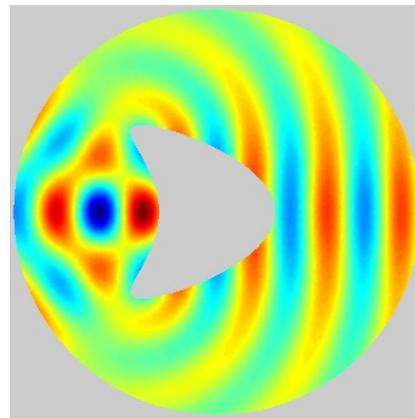
38 Jahren bei der Antrittsvorlesung dabei waren. Nach meinem Eindruck ist fünf eine untere Schranke für deren Anzahl. Schließlich freue ich mich sehr, dass ich viele von Ihnen zum ersten Mal in meiner Vorlesung sehe.

2 Inverse Streutheorie

Gegenstand dieser Vorlesung ist die inverse Streutheorie für elektromagnetische Wellen. Mathematische Streutheorie modelliert allgemein die Auswirkungen von Inhomogenitäten auf die Ausbreitung von Wellen. Ein besonderer Typ von Inhomogenitäten sind Objekte, in die Wellen nicht eindringen können, z.B. in ideal leitende Metalle dringen elektromagnetische Wellen nicht ein. Auf diesen Spezialfall werde ich mich meist beschränken.



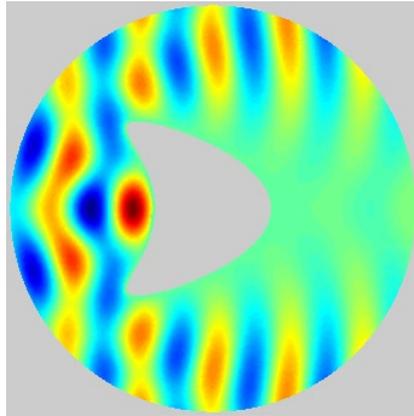
Video 1: Einfallende Welle



Video 2: Gestreute Welle

Betrachten wir zunächst die Ausbreitung einer zeitharmonischen ebenen Welle im homogenen freien Raum von links nach rechts in zweidimensionaler Modellierung. Die Farbskalierung im Video illustriert die zeitharmonische Oszillation der Amplitude der Welle. Sie können sich gerne auch die Ausbreitung einer Wasserwelle auf einem See vorstellen. In die Darstellung ist schon das drachenförmige Objekt eingegliedert, welches wir als Hindernis in die Wellenausbreitung einbringen, und zwar modellieren wir mit der Randbedingung ein ideal leitendes Metall in einem elektromagnetischen Wellenfeld. Die Welle wird an dem Objekt gestreut, und im zweiten Video ist deutlich zu sehen, dass die gestreute Welle vom Rand des Hindernisses ausgeht. Mit der einfallenden Welle aus dem vorangegangenen Bild überlagert sich die ge-

streuung zu der Gesamtwelle, die sich wie im dritten Video dargestellt im Äußeren des Hindernisses ausbreitet.



Video 3: Gesamte Welle

weit entfernt vom gestreuten Objekt soll dessen Position und Gestalt ermittelt werden.

Im anschaulichen Bild der Wasserwellen wollen wir aus der Form der am Ufer ankommenden Wellen auf die Position und Form eines in der Seemitte befindlichen Bootes schließen. In mehr praktischen Problemen kann das streuende Objekt eine Gewebearomalie bei der Ultraschalluntersuchung in der Klinik sein, oder ein Defekt in einer ICE-Achse, oder eine in Eis eingeschlossene 2500 Jahre alte Mumie eines Skythenfürsten in einem Grabhügel in der mongolischen Steppe.

In der Mathematik heißen zwei Probleme zueinander invers, wenn die Formulierung des ersten Problems die Lösung des zweiten Problems enthält und umgekehrt. Multiplikation und Division sind zueinander invers: die Multiplikationsaufgabe 4×5 enthält in der Formulierung das Ergebnis 5 der Divisionsaufgabe $20 : 4$, und umgekehrt enthält die Formulierung der Division das Ergebnis 20 der Multiplikation. Nach dieser Definition erscheint es zunächst willkürlich, nur eines der beiden Probleme als inverses Problem zu bezeichnen. Häufig ist jedoch eines der beiden Probleme einfacher zu behandeln und intensiver untersucht, während das zweite Problem schwieriger und in der mathematischen Literatur noch nicht so ausführlich behandelt ist. Dann wird das erste das direkte und das zweite das inverse Problem genannt.

Inverse Probleme treten in vielfältiger Weise auf bei der mathematischen

Modellierung von nichtinvasiven Evaluierungs- und Bildgebungsverfahren in Naturwissenschaften, Medizin und Technik. Grob gesprochen ist hier bei den entsprechenden direkten Problemen die Ursache bekannt und nach der Wirkung gefragt, während umgekehrt bei den zugeordneten inversen Problemen aus der Wirkung auf die Ursache zurückgeschlossen werden soll. Ein typisches Beispiel bildet die inverse Streutheorie. Hier kennen wir beim direkten Streuproblem das streuende Objekt als Ursache und fragen nach der Wirkung, d.h. nach der sich ausbildenden gestreuten Welle. Beim inversen Streuproblem kennen wir die gestreute Welle, d.h. die Wirkung, und fragen nach Form und Lage des Objekts, d.h. nach Information über die Ursache des gestreuten Felds.

In der konkreten mathematischen Formulierung beschränke ich mich heute der Einfachheit halber auf die skalare Wellengleichung als reduzierte Beschreibung elektromagnetischer Wellen. Wir betrachten zeitharmonische Lösungen mit einer Frequenz ω . Die Zeitabhängigkeit der Wellenfunktion $U(x, t) = \text{Re} \{u(x) e^{-i\omega t}\}$ wird in komplexer Schreibweise durch den Faktor $e^{-i\omega t}$ abgespalten, d.h. wir interessieren uns lediglich für den ortsabhängigen Anteil u . Im folgenden ist stets zu beachten, dass u eine komplexwertige Funktion ist.

Wir betrachten eine einfallende Welle in der Form einer ebenen Welle $u^i(x, d) = e^{ikx \cdot d}$ mit einer Wellenzahl k und der durch einen Einheitsvektor d gegebenen Fortschrittrichtung, wie sie in dem Video visualisiert war. Diese heißt ebene Welle, da die Wellenfronten auf der Fortschrittrichtung d senkrecht stehende Ebenen sind. Das Streuobjekt D ruft eine gestreute

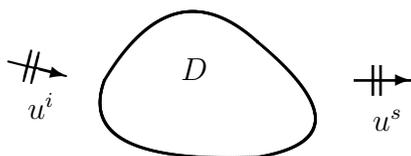


Fig. 1. Streuobjekt D

Welle $u^s(x, d)$ hervor, die sich mit der einfallenden Welle zu dem Gesamtfeld $u = u^i + u^s$ als Summe von einfallender und gestreuter Welle überlagert. Die zeitharmonische Wellengleichung hat die Form $\Delta u + k^2 u = 0$ mit dem Laplace Operator Δ und der positiven Wellenzahl k . Die Gleichung heißt Helmholtz Gleichung nach dem Physiker von Helmholtz. Diese Differentialgleichung muß im Aussengebiet $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ des Streuobjekts D erfüllt sein. Auf dem Rand muß das Gesamtfeld entsprechend der physikalischen Beschaffenheit des streuenden Objekts eine Randbedingung erfüllen. Die hier gewählte Dirichletsche Randbedingung $u = 0$ auf ∂D entspricht einem ideal leitenden metallischen Streuobjekt. Um sicher zu stel-

lung

len, dass die gestreute Welle nur Energie ausstrahlt, wird als Randbedingung im Unendlichen die nach dem Physiker Sommerfeld benannte Ausstrahlungsbedingung

$$\frac{\partial u^s}{\partial r} - ik u^s = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r = |x| \rightarrow \infty,$$

gefordert. Diese sichert zum einen die eindeutige Lösbarkeit des Dirichlet'schen Aussenraumproblems für die Helmholtzgleichung und zum andern gewährleistet sie das asymptotische Verhalten

$$u^s(x, d) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left\{ u_\infty(\hat{x}, d) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \rightarrow \infty, \quad \hat{x} := \frac{x}{|x|},$$

der ausstrahlenden Welle in einem Abstand vom Streuobjekt. Das gestreute Feld verhält sich wie eine vom Koordinatenursprung auslaufende Kugelwelle mit einem von der Beobachtungsrichtung \hat{x} abhängenden Amplitudenfaktor u_∞ bis auf Terme, die schneller abfallen. Mit $|x|$ bezeichne ich die euklidische Norm des Vektors x im \mathbb{R}^3 . Die auf der Einheitssphäre S^2 definierte Funktion u_∞ heisst aus offensichtlichen Gründen das Fernfeld und beschreibt im Prinzip das gestreute Feld in großer Entfernung vom Streuobjekt.

Das inverse Streuproblem, welches wir betrachten werden, besteht nun darin, aus der Kenntnis des einfallenden Feldes u^i und des Fernfeldes u_∞ die Position und Gestalt von D zu bestimmen. Dieses inverse Problem ist nichtlinear, da die Lösung des Aussenraumrandwertproblems nichtlinear vom Rand abhängt. Oder anders ausgedrückt: die Randbedingung stellt den Rand dar als Nullstellenmenge der Funktion u und die Bestimmung von Nullstellen einer nichtlinearen Funktion ist eine nichtlineare Aufgabe.

Die inkorrekte Gestelltheit des inversen Streuproblems rührt her von der Glattheit des Fernfelds, d.h. der Analytizität von Lösungen der Helmholtzgleichung. Kleine Störung der Fernfeld Daten in Normen, die geeignet sind, den Meßfehler zu quantifizieren, führen aus der Analytizität heraus und machen das Problem im Prinzip unlösbar. Präziser mathematisch formuliert: das Problem ist inkorrekt gestellt, da die Abbildung des Randes auf das Fernfeld ein kompakter Operator ist, und kompakte Operatoren keine stetige Inverse besitzen.

Obwohl in der Praxis das inverse Problem im allgemeinen nicht in dieser idealisierten Form auftritt, ist seine Untersuchung von grundsätzlicher Bedeutung. Es besitzt alle wesentlichen Eigenschaften mehr praxisrelevanter Aufgaben und Lösungsmethoden für dieses Modellproblem können in abgewandelter Form übertragen werden.

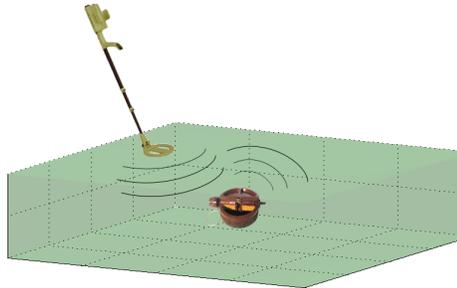


Fig. 2. Metalldetektor

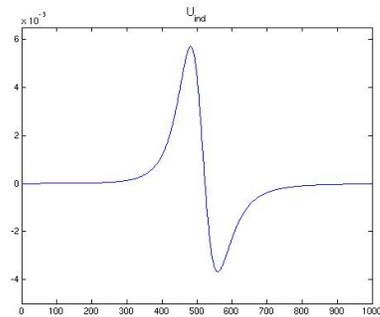


Fig. 3. Spannungsverlauf

Ich will beispielhaft an der Minendetektion aufzeigen, wie die mathematische Modellierung eines praxisrelevanten inversen Streuproblems aussehen kann. Eines der am häufigsten zum Minenräumen eingesetzten Geräte ist der Metalldetektor. Die Figur 2 zeigt die Grundstruktur eines solchen Metalldetektors. Der über den Boden geführte Detektor sendet ein elektromagnetisches Signal aus, d.h. eine elektromagnetische Welle. Diese wird von der im Boden befindlichen metallischen Mine und an der Trennfläche Luft-Boden gestreut. Das gestreute Feld ruft in einer Empfängerspule im Detektor eine induzierte Spannung hervor, die beim Führen des Detektors über die Mine etwa den in Figur 3 dargestellten Verlauf nimmt. In den herkömmlichen Minendetektoren wird ein optisches oder akustisches Signal ausgelöst, wenn die induzierte Spannung einen gewissen Schwellwert übersteigt. Durch vielfältig im Boden befindliche Metallteile, die keine Minen sind, führt dies zu einer hohen Fehlalarmrate, die das eigentliche Minenräumen sehr zeitaufwendig gestaltet.

Auf Anregung aus dem Auswärtigen Amt wurde ab 2004 vom Bundesministerium für Bildung und Forschung über drei Jahre ein Projektverbund *Metalldetektoren für Humanitäres Minenräumen* gefördert unter Beteiligung von zwölf Instituten aus den Bereichen Mathematik, Physik und Elektrotechnik. Zielsetzung dieses Verbundes war es, zu eruieren, ob die hohen Fehlalarmraten beim Einsatz von Metalldetektoren konventioneller Bauart durch nachgeschaltete mathematische Methoden reduziert werden können. Durch eine Aufzeichnung des Verlaufs der induzierten Spannung während der Bewegung über den Boden läßt sich die Minendetektion quantitativ als ein inverses Problem für elektromagnetische Felder interpretieren: Aus dem gemessenen Spannungsverlauf sollen geometrische Parameter zu Form, Größe und Position des entdeckten metallischen Objekts ermittelt werden.

Die grundlegende Modellierung will ich nur knapp darstellen: Aus der

Helmholtzgleichung werden die Maxwell'schen Gleichungen

$$\operatorname{curl} E - i\omega\mu H = 0, \quad \operatorname{curl} H + i\omega\varepsilon E = \sigma E$$

für das elektrische und magnetische Feld E und H mit unterschiedlichen elektromagnetischen Parametern μ, ε und σ für den Boden und die Luft. Wir haben Randbedingungen $E_{\text{tang}} = 0$ auf der metallischen Mine und stetigen Übergang von E_{tang} und H_{tang} an der Trennfläche Boden-Luft sowie anstelle der Sommerfeldschen die Silver-Müller Ausstrahlungsbedingung. Anstelle der ebenen Welle wird das Detektorsignal nach Biot-Savart modelliert und anstelle der Fernfelddaten haben wir als Messdaten die induzierte Spannung gemäß dem Faradayschen Gesetz.

In einem Beitrag aus Göttingen¹ und in Beiträgen aus den anderen mathematischen Standorten Karlsruhe, Mainz und Saarbrücken in dem Projektverbund wurde der Nachweis erbracht, dass unter Einsatz von Methoden der inversen Streutheorie das Ziel der Reduzierung der Fehlalarmraten beim Einsatz von Metalldetektoren zum Minenräumen grundsätzlich erreichbar ist nach einer entsprechenden messtechnischen Umgestaltung der Detektoren und Ergänzung der Software. Diese messtechnische Umgestaltung ist dann Aufgabe der Entwicklungsabteilungen der Hersteller von Minendetektoren und nicht mehr primär der Mathematik.

3 Eindeutigkeit

Hier kehre ich zurück zu dem Modellproblem. Als erstes stellt sich die Frage der Identifizierbarkeit, d.h. ob das Fernfeld für die Streuung einer einfallenden Welle genügend Information enthält zur eindeutigen Festlegung der Gestalt und Position des Streuobjekts. Dies ist vorab zu klären, denn nur bei einer positiven Antwort macht der nächste Schritt Sinn, nämlich die Frage nach konkreten Rekonstruktionsverfahren. Bei Nichteindeutigkeit würden wir unter Umständen Phantome rekonstruieren, im allgemeinen Kontext der inversen Problem würden wir auf falsche Ursachen schließen.

¹Delbary, F., Erhard, K., Kress, R., Potthast, R. and Schulz, J.: Inverse electromagnetic scattering in a two-layered medium with an application to mine detection. *Inverse Problems* 24, 015002 (2008).



Franz Rellich

Ein Schlüssel zur Beantwortung der Eindeutigkeitsfrage liegt in einem nach Rellich benannten Lemma. Franz Rellich hat in Göttingen Mathematik studiert, bei Richard Courant promoviert und mußte wie viele andere Göttingen 1933 verlassen, da er eine ablehnende Haltung zum Nationalsozialismus hatte und als Mitglied der sogenannten Courant Clique galt. Er kam 1946 nach Göttingen zurück und hat als Direktor des Mathematischen Instituts maßgebend an dessen Wiederaufbau mitgewirkt.

Nach dem Rellich Lemma ist das gestreute Feld im gesamten Aussengebiet eindeutig bestimmt durch das Fernfeld, und somit ist das Gesamtfeld aus einfallendem und gestreutem Feld eindeutig festgelegt. Damit ist die Eindeutigkeitsfrage für das Streuobjekt äquivalent zur Nichtexistenz von weiteren Oberflächen, auf denen u identisch verschwindet, und zwar so, dass das gestreute Feld im zugehörigen Aussengebiet erklärt ist.

Die Existenz eines weiteren Streuobjekts außerhalb von D können wir sofort ausschließen. In dieser Situation wäre das gestreute Feld offenbar im gesamten \mathbb{R}^3 erklärt. Analog zum Satz von Liouville aus der Funktionentheorie muß eine ganze Lösung der Helmholtzgleichung, die die Ausstrahlungsbedingung erfüllt, identisch verschwinden. Das einfallende Feld als Exponentialfunktion ist aber überall ungleich Null und kann daher die Randbedingung nicht erfüllen.

Bei einer Überschneidung der Streuobjekte greift diese Argumentation nicht mehr. Die Antwort auf die Eindeutigkeit sind Fragezeichen: Wir wissen es nicht. Dies ist eines der offenen Probleme, die in der Vorlesungsankündigung versprochen sind.

Hier übergehe ich diese Problematik zunächst, indem ich in dem inversen Problem mehr Information, mehr Daten vorsehe. Wir fragen, ob die Fernfelder für alle Einfallsrichtungen und alle Beobachtungsrichtungen das Streuobjekt eindeutig festlegen. Hier ist die Antwort positiv und gegeben in einem der wenigen klassischen Ergebnisse der inversen Streutheorie: dem Satz von Schiffer aus dem Jahr 1967. Er besagt, dass zwei Objekte D_1

und D_2 übereinstimmen müssen, wenn ihre Fernfelder bei Streuung ebener Wellen für alle Einfalls- und Beobachtungsrichtungen gleich sind, d.h. wenn $u_{\infty,1}(\hat{x}, d) = u_{\infty,2}(\hat{x}, d)$ für alle Beobachtungsrichtungen \hat{x} und alle Einfallsrichtungen d .

Ich will den Beweis dieses Klassikers kurz skizzieren. Es ist ein indirekter Beweis, ein Beweis durch Widerspruch. Wir nehmen an, D_1 und D_2 seien zwei voneinander verschiedene Objekte, bei denen die ebenen Wellen die gleichen Fernfelder hervorrufen. Wir bezeichnen mit D^* die unbeschränkte Komponente des Komplements der Vereinigung von D_1 und D_2 , d.h. die innere Insel, die weder zu D_1 noch zu D_2 gehört, ist nicht in D^* enthalten.

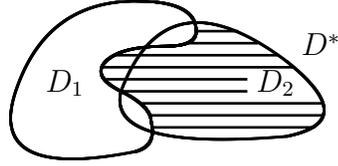


Fig. 4. Hilfsgebiet

Nach dem Lemma von Rellich stimmen wegen der Übereinstimmung der Fernfelder auch die Gesamtfelder $u_1(\cdot, d) = u_2(\cdot, d)$ in D^* überein für alle Einfallsrichtungen d . Das schraffierte Hilfsgebiet $(\mathbb{R}^3 \setminus D^*) \setminus D_1$ aus Figur 4 ist nicht leer auf Grund der Annahme, dass D_1 und D_2 voneinander verschieden sind. Es liegt

im Komplement von D_1 und daher ist dort das Gesamtfeld u_1 wohldefiniert. Es löst im Hilfsgebiet die Helmholtzgleichung und verschwindet auf dem Rand. Auf dem Randanteil, der Teil des Randes von D_1 ist, verschwindet u_1 als Gesamtfeld für D_1 . Auf dem Randanteil, der Teil des Randes von D_2 ist, verschwindet das Gesamtfeld u_2 für D_2 und es gilt $u_1 = u_2$ nach Rellich. Es läßt sich weiter zeigen, dass die Gesamtfelder zu voneinander verschiedenen Einfallsrichtungen linear unabhängig sind auf dem Hilfsgebiet, da die einfallenden ebenen Wellen linear unabhängig sind. Damit erhalten wir einen Widerspruch zu der Eigenschaft, dass die Eigenräume zu den Eigenwerten des Laplace Operators zur homogenen Dirichletschen Randbedingung endlich dimensional sind. Dies gilt unabhängig von der Randregularität des Hilfsgebietes als Folge der kompakten Einbettung des Sobolewraums H_0^1 in L^2 . Damit haben wir die Annahme der Existenz zweier verschiedener Gebiete mit gleichen Fernfeldern zu einem Widerspruch geführt.

Da auch bei glatten Rändern von D_1 und D_2 das schraffierte Hilfsgebiet beliebig unglatt sein kann, und der Einbettungssatz nur bei der Nullrandbedingung ohne Randregularität auskommt, kann der Schiffersche Beweis nicht auf andere Randbedingungen übertragen werden. Ferner ist der

Beweis offenbar nicht konstruktiv, er liefert kein Verfahren zur konkreten Berechnung des Streuobjekts.

Eine alternative Beweisidee, die generell für alle Randbedingungen benutzt werden kann und die ihrer Natur nach konstruktiv ist, haben Andreas Kirsch² und ich 1992 vorgestellt. Die Darstellung dieses Beweises versage ich mir hier und will nur anmerken, dass ich immer gerne darauf hinweise, dass Andreas und ich den entscheidenden Durchbruch zur Beweisführung gefunden haben auf einem endlos langen Abstieg bei einer Bergtour in den Dolomiten: Mathematiker haben ihr Labor immer dabei.

Ich habe den Beweis des Satzes von Schiffer aus drei Gründen hier kurz skizziert. Zum ersten sollte jeder mathematische Vortrag, jede mathematische Vorlesung einen halbwegs vollständigen Beweis enthalten. Diese Pflicht an den Vortragenden und an die Zuhörer haben wir somit erfüllt, und Sie können sich entspannt zurücklehnen für den Rest der Vorlesung. Zum zweiten gibt mir dies die Gelegenheit, daraufhin zu weisen, dass dieses wichtige Resultat nicht von Schiffer selbst publiziert worden ist, sondern als eine Private Communication in der 1967 bei Academic Press erschienenen Monographie *Scattering Theory* von Lax und Phillips auftritt. Schiffer und Phillips waren Kollegen am Mathematics Department der Stanford University. Heute in einer Zeit permanenter Evaluierung der Forschung und permanentem Druck zur Einwerbung von Drittmitteln wäre dies undenkbar: niemand verschleudert ein so wertvolles Forschungsergebnis als private Mitteilung an Kollegen.

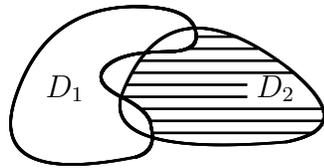


Fig. 5. Inkorrektes Hilfsgebiet

Zum dritten kann ich an Hand des Beweises aufzeigen, dass es wichtig ist, das schraffierte Hilfsgebiet korrekt zu wählen. Formelmäßig in der Symbolik der Mengenlehre ist die Darstellung $(\mathbb{R}^3 \setminus D^*) \setminus D_1$ unübersichtlicher als durch $D_2 \setminus (D_1 \cap D_2)$ von D_2 den Durchschnitt von D_1 und D_2 zu entfernen. Dies ergibt dann das schraffierte Hilfsgebiet aus Figur 5, welches nur dann mit dem aus Figur 4 übereinstimmt, wenn das Komplement der Vereinigung von D_1 und D_2 zusammenhängend ist, d.h. wenn keine inneren Inseln auftreten. Mit diesem Hilfsgebiet funktioniert der Beweis jedoch nicht, da auf dem inneren Randstück die Übereinstimmung von u_1 und u_2 nicht gesichert ist. Liest

²Kirsch, A. and Kress, R.: Uniqueness in inverse obstacle scattering. *Inverse Problems* **9**, 285–299 (1993).

man den Beweis in der Monographie von Lax und Philipps, so stellt man fest, dass dort die unkorrekte Wahl getroffen ist. Diese Inkorrektheit in der Monographie der prominenten und weltweit angesehenen Mathematiker Peter Lax vom Courant Institut in New York und Ralph Phillips von der Stanford University ist tröstlich: sie hilft mir, die Unkorrektheiten in meinen Büchern leichter zu ertragen.

Ich kehre noch einmal zurück zur Frage der Eindeutigkeit bei einer einfallende Welle. Ich habe schon erwähnt, dass diese ein zur Zeit noch ungelöstes Problem ist. Aber unter einschränkenden a priori Annahmen über das unbekannte Streuobjekt kann durchaus Eindeutigkeit nachgewiesen werden. Durch Ausnutzen der Monotonie der Eigenwerte in Abhängigkeit vom Gebiet haben Colton und Sleeman³ auf die Schiffersche Beweisidee aufbauend nachgewiesen, dass unter der a priori Information, dass das Produkt aus der Wellenzahl k und dem Durchmesser des Streuobjekt kleiner als 2π ist, das Fernfeld zu einer einfallende Welle das Streuobjekt eindeutig festlegt.

Zum Abschluss meiner Betrachtungen zur Eindeutigkeit gebe ich Ihnen drei offene, drei ungelöste Probleme zur Eindeutigkeit mit auf den Weg. Erstens: die schon mehrfach erwähnte Eindeutigkeit bei einer einfallenden ebenen Welle ohne a priori Information an die Geometrie des unbekanntes Objekts. Zweitens: Eindeutigkeit bei anderen Randbedingungen z.B. der Neumannschen Randbedingung bei a-priori Information über die Größe des Streuobjekts analog zu dem Resultat von Colton und Sleeman. Drittens kann man die Frage nach der Eindeutigkeit bei Vorliegen lediglich der Amplitude des Fernfeldes stellen, d.h. bei eingeschränkten Fernfelddaten. Die Amplitude des Fernfeldes ist invariant gegenüber Translationen des Streuobjekts. Also kann höchstens Eindeutigkeit der Gestalt erwartet werden. Hierfür gibt es noch keine Ergebnisse, lediglich numerische Resultate, die Eindeutigkeit suggerieren.

4 Rekonstruktionsverfahren

Nachdem die Identifizierbarkeit geklärt ist, können wir uns Rekonstruktionsverfahren zuwenden. Ich will im Schlußteil meiner Vorlesung Grundideen zu zwei Klassen von Lösungsverfahren für das inverse Streuproblem vorstellen: iterative Verfahren und Samplingverfahren. Bei iterativen Verfahren wird das inverse Problem interpretiert als nichtlineare inkorrekt gestellte Operator

³Colton, D. and Sleeman, B.D.: Uniqueness theorems for the inverse problem of acoustic scattering. IMA J. Appl. Math. **31**, 253–259 (1983).

Gleichung, und diese dann durch regularisierte Newton Iteration, Landweber Iteration oder verwandte Verfahren gelöst.

Am naheliegendsten ist dabei, die Abbildung A zu betrachten, die für ein festes einfallendes Feld den Rand des Streuobjekts abbildet in das Fernfeld der zugehörigen gestreuten Welle. Zur Vereinfachung der Darstellung nehme ich an, dass die Randfläche sternförmig ist, d.h. in Polarkoordinaten mit einer Radialfunktion r dargestellt werden kann mit dem Einheitsvektor e in radialer Richtung, der über die Einheitssphäre variiert. Dann ordnet der Operator A durch die Lösung des direkten Streuproblems bei festgehaltener einfallender Welle jeder Radialfunktion r das durch Streuung an der Randfläche ∂D_r erzeugte Fernfeld zu. Bei gegebenem Fernfeld u_∞ besteht das inverse Problem in der Lösung der Gleichung $A(r) = u_\infty$. Ausgehend von einer Näherung r_0 linearisieren wir und lösen anstelle der vollen nichtlinearen Gleichung $A(r_0 + q) = u_\infty$ für die Korrektur q nur die lineare Näherungsgleichung $A(r_0) + A'(r_0)q = u_\infty$. Die inkorrekte Gestelltheit erfordert eine Regularisierung, z.B. durch Tikhonov Regularisierung. Im Sinne eines Newton Verfahrens wird dieser Schritt wiederholt, bis ein passendes Abbruchkriterium erfüllt ist.

Die Durchführung erfordert die Charakterisierung und Berechnung der Ableitung des Operators A nach dem Rand, d.h. nach der Randdarstellung r . Diese existiert im Sinne einer Fréchetableitung und ist charakterisiert durch $A'(r)q = v_{q,\infty}$ als das Fernfeld der Lösung v_q der Helmholtzgleichung im Aussengebiet von D_r , die die Ausstrahlungsbedingung erfüllt und die Dirichletsche Randbedingung $v_q = -\nu \cdot e \partial_\nu u q$, in der die Normalableitung des Gesamtfelds und das Skalarprodukt zwischen dem Normalenvektor ν und der Ableitungsrichtung qe auftritt. Dies ist eine Fréchetableitung in dem Sinne einer Abbildung zwischen $H^2(S^2)$ nach $L^2(S^2)$. Ihre Charakterisierung ist erstmals von Roger 1982 gewonnen worden durch formales Differenzieren der Randbedingung nach r . Rigorose Beweise, die natürlich auf der Existenzanalyse für das direkte Problem aufbauen müssen, stammen von Kirsch mit einer Hilbertraum Methode im Sinne einer Gebietsableitung und von Potthast unter Verwendung von Randintegralgleichungsmethoden. Numerische Implementierungen sind von zahlreichen Autoren publiziert worden, zunächst für zweidimensionale Testfälle und in den letzten Jahren auch physikalisch relevant dreidimensional von Harbrecht and Hohage⁴. Grundsätzlich zeigen die numerischen Resultate, dass diese Iterationsverfahren sehr genaue Rekon-

⁴ Harbrecht, H. and Hohage, T.: Fast methods for three-dimensional inverse obstacle scattering problems. *Jour. Integral Equations and Appl.* **19**, 237–260 (2007).

strukturen des Streuobjekts liefern. Allerdings sind zwei praktische Nachteile zu vermerken. Der Rechenaufwand ist sehr hoch, da in jedem Schritt zur Auswertung der Zielfunktion A und ihrer Ableitung mehrere Vorwärtsprobleme zu lösen sind. Ferner bedarf es wie stets bei Newton Iterationen einer brauchbaren Startnäherung um Konvergenz zu sichern, also eine brauchbare a priori Information zu Position und Form des Streuobjekts. Ferner ist die numerisch beobachtete Konvergenz noch nicht theoretisch abgesichert, trotz einiger vielversprechender vorläufiger Resultate von Hohage⁵ und Potthast⁶. Es ist offen, ob die in den letzten Jahren gewonnenen theoretischen Resultate über Konvergenzaussagen zu regularisierten Newton Iterationen für inkorrekt gestellte nichtlineare Operatorgleichungen zwischen Hilberträumen auf den Fall des vorliegenden inversen Streuproblems anwendbar sind, d.h. wir haben ein weiteres ungelöstes Problem.

Bevor ich ein numerisches Beispiel zeige, will ich kurz Varianten vorstellen, die den Rechenaufwand etwas reduzieren. Diese gehen aus von dem Huygensschen Prinzip aus der Elektromagnetik. Nach diesem ist das gestreute Feld darstellbar gemäß

$$u^s(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus D,$$

als Superposition von Sekundärquellen auf dem Rand des Streuobjekts. Dabei ist die Quelledichte gegeben durch die Normalableitung des Gesamtfelds. Indem wir zu dem Fernfeld übergehen, erhalten wir daraus nach Umbezeichnung der Normalableitung in $4\pi\varphi$ und Parameterisierung des Randes durch eine Radialfunktion r die Datengleichung

$$u_\infty(\hat{x}) = - \int_{\partial D_r} e^{-ik\hat{x}\cdot y} \varphi(y) ds(y), \quad \hat{x} \in S^2.$$

Die Restriktion auf den Rand ergibt unter Berücksichtigung der Randbedingung für das gestreute Feld die Feldgleichung

$$u^i(x) = \int_{\partial D_r} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial D_r.$$

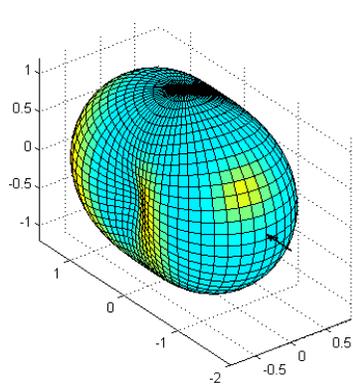
Dies sind zwei Gleichungen für zwei Unbekannte: den unbekanntem Rand und die unbekanntem Normalableitung. Sie sind linear bezüglich der Normalableitung und nichtlinear bezüglich des Randes. Es bieten sich grundsätzlich drei

⁵Hohage, T.: Iterative Methods in Inverse Obstacle Scattering: Regularization Theory of Linear and Nonlinear Exponentially Ill-Posed Problems. Dissertation, Linz 1999.

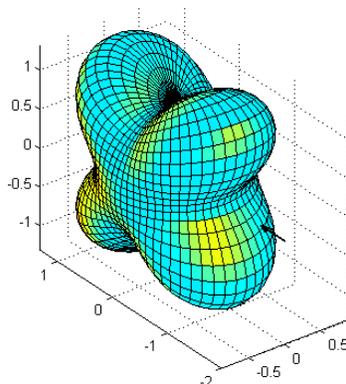
⁶Potthast, R.: On the convergence of a new Newton-type method in inverse scattering. Inverse Problems **17**, 1419–1434 (2001).

Varianten zur iterativen Lösung an. Erstens können wir bei Vorliegen einer Näherung r_0 eine der beiden linearen Gleichungen nach φ lösen und dann bei festgehaltenem φ die andere Gleichung nach dem Rand linearisieren und aktualisieren gemäß $r_1 = r_0 + q$. Diese beiden Schritte werden alternativ iteriert. Dies liefert zwei Varianten, je nachdem, ob wir die erste oder die zweite Gleichung als lineare Gleichung nach φ lösen.

Als dritte Alternative können mit Näherungen r_0 und φ_0 beide Gleichungen simultan linearisiert werden. Diese drei Varianten habe ich in den letzten Jahren zusammen mit den Doktoranden und späteren Postdoktoranden Pedro Serranho und Olha Ivanyshyn⁷ ausgiebig untersucht, insbesondere auch hinsichtlich ihrer Beziehungen untereinander und zu der Newton Iteration mit dem Rand nach Fernfeld Operator A , die ich gerade betrachtet habe. Dabei haben wir intensive Unterstützung von auswärtigen Kolleginnen und Kollegen erhalten. Im Gegensatz zu der aufwendigen Charakterisierung der Ableitung von A , sind die Ableitungen der Integraloperatoren wiederum Integraloperatoren und dies führt zu einer Reduzierung des Rechenaufwands.



Video 4



Video 5

In einem numerischen Beispiel ist im linken Video die Rekonstruktion aus dem Fernfeld für Streuung einer ebenen Welle mit der durch den Pfeil angedeuteten Einfallrichtung unter Verwendung von 128 Beobachtungsrichtungen dargestellt. Die benutzte Wellenlänge ist von gleicher Größenordnung

⁷ Ivanyshyn, O., Kress, R. and Serranho, P.: Huygens' principle and iterative methods in inverse obstacle scattering. *Advances in Computational Mathematics* DOI 10.1007/s10444-009-9135-6.

wie die Abmessung des Objekts, d.h. wir sind im sogenannten Resonanzbereich. Zur Illustration der Stabilität der eingebauten Regularisierung ist ein relativer Fehler von zwei Prozent auf die synthetischen Fernfelddaten aufaddiert. Das Video zeigt die Folge der Approximationen ausgehend von einer Kugeloberfläche als Startnäherung. Eine Iteration braucht etwa 20 Sekunden Rechenzeit. Das rechte Video zeigt die entsprechenden Iterationen für ein weiteres Streuobjekt.

Zum Abschluss will ich noch eine zweite Verfahrensklasse skizzieren, und zwar Verfahren, die in den letzten 15 Jahren entwickelt worden sind und die als Sampling oder Probe Verfahren bezeichnet werden. Deren Grundideen bestehen in dem Design von Indikatorfunktionen j auf dem \mathbb{R}^3 oder einem Teilgebiet, deren Wert $J(z)$ entscheidet, ob ein Punkt z innerhalb oder außerhalb des Streuobjekts D liegt. Numerisch wird der Wert der Indikatorfunktion für ein Gitter von Punkten ermittelt und das Streuobjekt wird durch eine Farbkodierung von $J(z)$ visualisiert.

Die lineare Samplingmethode geht aus von dem Fernfeldoperator, der definiert ist als Integraloperator

$$(Fg)(\hat{x}) := \int_{S^2} u_\infty(\hat{x}, d)g(d) ds(d), \quad \hat{x} \in S^2,$$

auf dem L^2 Raum auf der Einheitssphäre und dessen Kern gegeben ist durch das Fernfeld für die Einfallrichtung d und die Beobachtungsrichtung \hat{x} . Hieraus wird deutlich, dass die lineare Sampling Methode wie im Prinzip alle Sampling und Probe Methoden mehr Information benötigen, nämlich das Fernfeld für alle Einfall- und Beobachtungsrichtungen. Wir setzen $e_z(\hat{x}) = e^{-ikz \cdot \hat{x}}$ für $\hat{x} \in S^2$ und betrachten die lineare Integralgleichung $Fg = e_z$ mit einem beliebigen Parameterpunkt z . Sei nun z ein Punkt innerhalb des Streuobjekts D und g_z eine Lösung der Integralgleichung

$$\int_{S^2} u_\infty(\hat{x}, d)g_z(d) ds(d) = e^{-ikz \cdot \hat{x}}, \quad \hat{x} \in S^2.$$

Die rechte Seite ist das Fernfeld einer Punktquelle und die linke Seite durch Superposition das Fernfeld einer Überlagerung von gestreuten Feldern u^s für die Streuung von ebenen Wellen. Da die beiden Fernfelder übereinstimmen, müssen nach Rellich die beiden gestreuten Felder übereinstimmen, d.h.

$$\int_{S^2} u^s(x, d)g_z(d) ds(d) = \frac{e^{ik|x-z|}}{|x-z|}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}.$$

Infolge der Randbedingung kompensiert auf dem Rand die gestreute Welle die einfallende ebene Welle, d.h. es gilt

$$-\int_{S^2} e^{ikx \cdot d} g_z(d) ds(d) = \frac{e^{ik|x-z|}}{|x-z|}, \quad x \in \partial D.$$

Wenn wir nun als Indikatorfunktion die L^2 -Norm $J(z) := \|g_z\|_{L^2(S^2)}$ einer regularisierten Lösung g_z in Abhängigkeit von z wählen, so muss diese bei Annäherung an den Rand unbeschränkt anwachsen, da die L^2 Norm der rechten Seite unbeschränkt anwächst. Also erwarten wir, dass wir den Rand charakterisieren können, durch die Punkte bei denen die Norm der Lösung g_z groß wird.

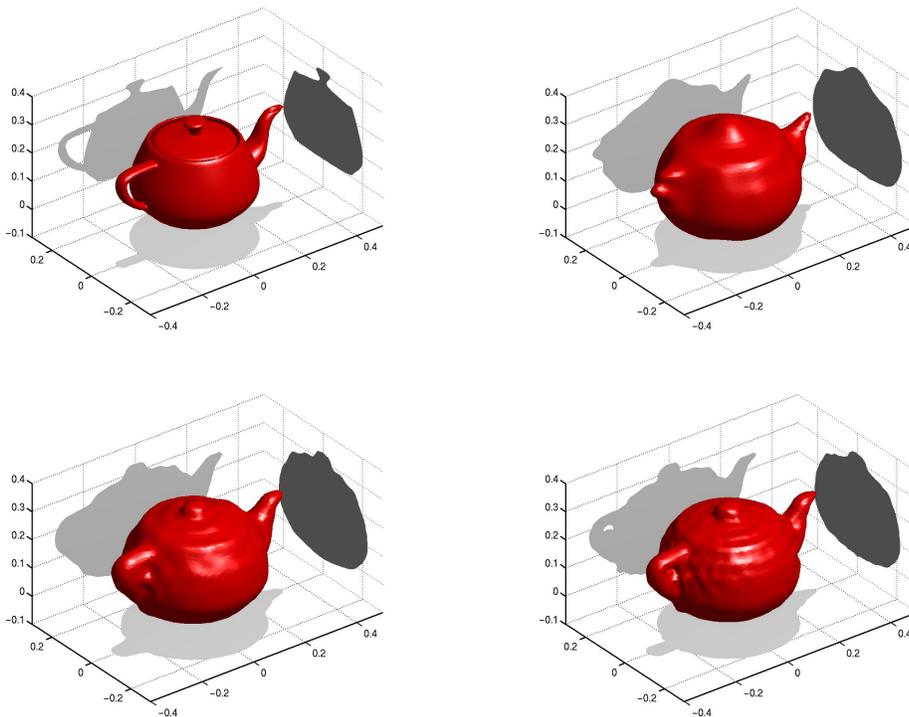


Fig. 6. Rekonstruktionen einer Teekanne

Die schlechte Nachricht ist nun, dass diese Integralgleichung im allgemeinen nicht lösbar ist, d.h. der Operator F ist zu stark glättend. Daher ist die Motivation zunächst obsolet. Die gute Nachricht ist, dass das Verfahren bestens funktioniert und sich durch Approximationsargumente auch

legitimieren läßt. Diese Methode ist erstmals 1996 von Colton und Kirsch⁸ vorgeschlagen worden und mittlerweile von verschiedenen Autoren auf eine Reihe von verwandten inversen Streuproblemen ausgedehnt worden.

Die Beispiele in Figur 6 zeigen Rekonstruktionen einer Teekanne aus dem Streufeld ebener Wellen im Resonanzbereich. Die Randrekonstruktionen sind dargestellt als Niveauflächen der Indikatorfunktion mit einem passend gewählten Niveauparameter. Neben dem Original sind Rekonstruktionen aus 128 ebenen Wellen mit 128 Beobachtungsrichtungen bei jeweils verdoppelter Wellenzahl dargestellt. Wir beobachten deutlich die Zunahme der Auflösung von Details mit kleiner werdender Wellenlänge.

Die lineare Samplingmethode gibt mir die Möglichkeit auf einen weiteren Göttinger Mathematiker aus der ersten Hälfte des letzten Jahrhunderts hinzuweisen. Die in der Motivation und dann natürlich in der Analyse des Verfahrens auftretenden Überlagerungen von ebenen Wellen

$$v(x) = \int_{S^2} e^{ik \cdot x \cdot d} g(d) ds(d)$$

sind spezielle Lösungen der Helmholtzgleichung, die von Gustav Herglotz in den 1940er Jahren eingeführt und nach ihm benannt sind. Herglotz wurde 1925 als Nachfolger von Carl Runge nach Göttingen berufen und blieb hier bis zu seinem Tod. Das Photo zeigt Gustav Herglotz zusammen mit Steffi.



Gustav Herglotz



Carl Runge

⁸Colton, D. and Kirsch, A.: A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region. *Inverse Problems* **12**, 383–393 (1996).

Das Auftreten von Herglotz als Nachfolger von Carl Runge gibt mir die Gelegenheit einen meiner Lieblingsaspekte aus der Geschichte der Angewandten Mathematik in Göttingen anzusprechen. Carl Runge wurde 1904 auf den Lehrstuhl für Angewandte Mathematik berufen an dem auf Betreiben von Felix Klein neu eingerichteten Institut für Angewandte Mathematik und Mechanik. Der Partnerlehrstuhl für Mechanik war mit Ludwig Prandtl besetzt. Nach Runges Emeritierung wurde als Nachfolger mit Herglotz ein Mathematiker zwar von hohem Rang berufen, jedoch hatte Herglotz keine besondere Beziehungen zu den Anwendungen. Dies wird auch dadurch deutlich, dass Herglotz Professur am Mathematischen Institut angesiedelt war und nicht mehr am Institut für Angewandte Mathematik und Mechanik. Zu dieser Zeit war Richard Courant, der Namenspatron unserer Courant Forschungszentren, Direktor des Mathematischen Instituts. In einem Nachruf auf Runge führt er zunächst aus, dass es Felix Kleins Anliegen war, durch Runges Berufung als Professor für Angewandte Mathematik den Anwendungen die gebührende Stellung in der Mathematik zu geben, nachdem diese gegen Ende des 19. Jahrhunderts etwas vernachlässigt worden waren. Courant schreibt weiter, dass Runge so erfolgreich in Göttingen gewirkt habe, dass die Mathematik nicht mehr in Gefahr sei, wieder den Kontakt zu den Anwendungen zu verlieren, und dass daher eine besondere Professur für Angewandte Mathematik nicht mehr erforderlich sei. Sie sehen wie gefährlich es ist, die anvertrauten Aufgaben zu erfolgreich zu erfüllen: man macht sich überflüssig. Immerhin dauerte es fast 50 Jahre bis in Göttingen 1969 und 1971 wieder zwei Lehrstühle für Angewandte Mathematik eingerichtet wurden.

Aus der Geschichte noch einmal kurz zurück zur Mathematik. Als zweites Verfahren aus der Gruppe der Sampling Verfahren möchte ich noch die Faktorisierungsmethode kurz betrachten. Auch sie geht wie die lineare Sampling Methode von dem Fernfeldoperator aus. Anstelle der Gleichung $Fg_z = e_z$ betrachten wir nun die Gleichung bei der F im Prinzip durch die Wurzel aus F ersetzt ist. Da F nicht positiv definit ist, ist die Wurzel aus F nicht erklärt und daher verwenden wir die vierte Wurzel aus dem Produkt F^*F . Es ist eines der bemerkenswertesten und schönsten Ergebnisse der letzten Jahre über inverse Streuprobleme, dass die Gleichung $(F^*F)^{1/4}g = e_z$ das Streugebiet vollständig charakterisiert. Die Gleichung ist lösbar genau dann, wenn der Parameterpunkt z innerhalb von D liegt. Im Vergleich zu F ist $(F^*F)^{1/4}$ weniger glättend, und daher zu der Diskriminierung durch die rechte Seite geeignet. Damit haben wir mit der Norm $J(z) := \|g_z\|_{L^2(S^2)}$ einer nach Tikhonov regularisierten Lösung wiederum eine Indikatorfunktion zur nume-

rischen Charakterisierung des Streugebiets. Diese Norm ist klein bzw. groß, je nachdem ob die Gleichung lösbar oder nicht lösbar ist. Dieses Resultat stammt von Kirsch⁹ und die Methode ist mittlerweile auf andere Randbedingungen und verwandte Problemstellungen ausgedehnt worden. Sie heißt Faktorisierungsmethode, weil der Beweis auf einer Faktorisierung des Operators F als Produkt dreier anderer Operatoren dargestellt wird. Während der Operator F den unbekanntem Rand nur implizit über die Fernfelder enthält, geht der Rand in die drei Faktoren der Faktorisierung explizit ein, und dies erlaubt den Nachweis der Diskriminierungseigenschaft. Als offenes Problem ist zu erwähnen, dass das Analogon dieser Aussage für die vollen Maxwell Gleichungen zwar numerisch bestätigt wurde, aber noch unbewiesen ist.

Der wesentliche Vorteil der Faktorisierungsmethode und allgemein der Sampling Verfahren besteht darin, dass sie ohne a priori Information auskommen. Ihr Nachteil ist die Erfordernis von mehr Daten und eine unscharfe Rekonstruktion der Ränder wie aus den zweidimensionalen Beispielen in den Figuren 7 und 8 deutlich wird. Hier besteht das Streuobjekt aus zwei Anteilen, dem Drachen, den wir zu Beginn gesehen haben, und einer Ellipse. Die Rekonstruktionen basieren auf 32 Einfalls- und Beobachtungsrichtungen. Links sind Rekonstruktionen mit exakten Daten dargestellt und rechts Rekonstruktionen mit einem Prozent additivem Fehler.

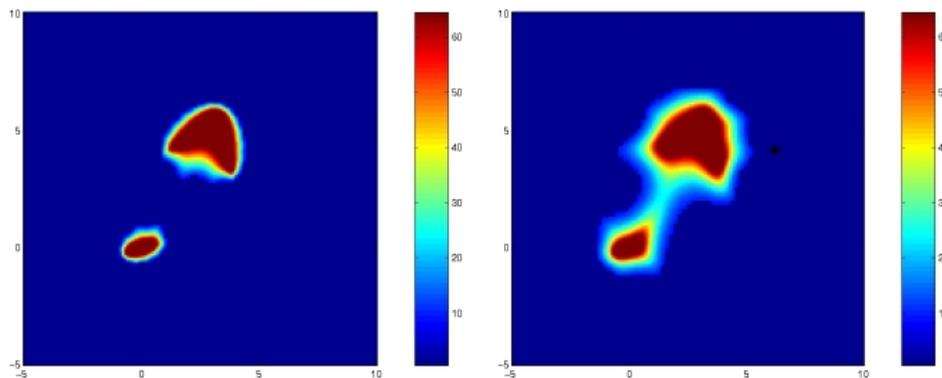


Fig. 7. Faktorisierungsmethode mit $k = 1$

Das Beispiel in Figur 9 zeigt Rekonstruktionen mit realen Messdaten aus dem Ipswich Dataset der Electromagnetics Technology Division der Hanscom

⁹Kirsch, A.: Characterization of the shape of the scattering obstacle by the spectral data of the far field operator. *Inverse Problems* **14**, 1489–1512 (1998).

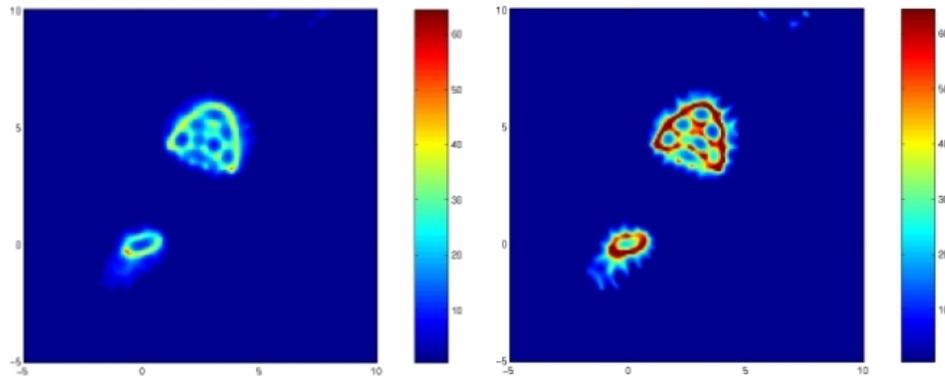


Fig. 8. Faktorisierungsmethode mit $k = 5$

Air Force Base. Das Objekt ist ein Aluminium Dreieck, und das Dreieck ist in der Rekonstruktion erkennbar.

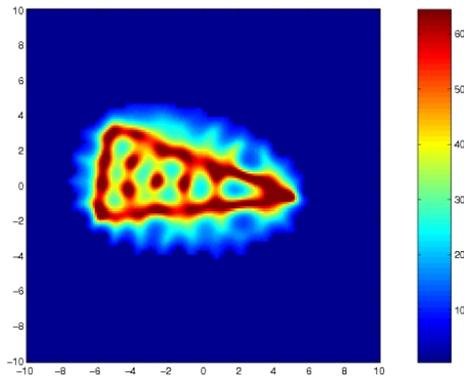


Fig. 9. Faktorisierungsmethode mit realen Daten

Zum Abschluss fasse ich wieder drei offene Probleme zu den Rekonstruktionsverfahren zusammen. Erstens die offene Konvergenzanalyse für regularisierte Newton Verfahren. Zweitens ist die Faktorisierungsmethode bei der Maxwell Gleichung für die Streuung an einem idealen Leiter noch unbewiesen. Drittens schließlich sollte an einer fundierten Kombination von Sampling und Iterationsverfahren gearbeitet werden in dem Sinne, dass bei Bedarf die aus einem Samplingverfahren gewonnenen Approximationen durch ein anschließendes Iterationsverfahren in der Rekonstruktionsgenauigkeit verbessert werden.

5 Dank

Damit bin ich am Ende der Mathematik angelangt. Ich denke es ist deutlich geworden, dass einerseits die inverse Streutheorie Antworten auf praktischen Aufgabenstellungen geben kann und dass andererseits noch viele Fragen offen sind. Vielleicht ist es mir gelungen, Ihnen etwas von meiner Faszination für diesen Bereich der Mathematik zu vermitteln. Bei den Experten bitte ich um Nachsicht, das viele Facetten der inversen Streutheorie nur recht oberflächlich angesprochen worden sind. Falls Sie Interesse an inversen Streuproblemen gefunden haben, kann ich eine Literaturempfehlung¹⁰ geben. Bei den Nichtmathematikern unter Ihnen bitte ich um Nachsicht für die viele Mathematik: aber Mathematik ist ohne Mathematik nicht darstellbar.

Am Ende der Vorlesung habe ich eingigen Dank auszusprechen. Zunächst danke ich Lothar Nannen, Olha Ivanyshyn, Housseem Haddar und Andreas Kirsch in der Reihenfolge des Auftretens für die numerischen Beispiele. Dann danke ich den Kolleginnen und Kollegen am Institut für Numerische und Angewandte Mathematik für fast 40 Jahre Zusammenarbeit in einer hervorragenden und entspannten Arbeitsatmosphäre, einem Arbeitsklima, das über die Jahre am Institut auch bei wechselnder personeller Zusammensetzung kontinuierlich erhalten blieb. Ich freue mich darauf, dieses angenehme Arbeitsumfeld auch als Emeritus zu genießen. Für die gemeinsame wissenschaftliche Arbeit danke ich zunächst meinen Doktorandinnen und Doktoranden Paulik, B. Steffen, R. Steffen, Urbanek, Willers, Wilde, Jost, Gülzow, Blöhbaum, Hähner, Wienert, Zinn, Petry, Potthast, Otte, Hofmann, Mönch, Meyer, Hohage, Gerlach, Schormann, Vogt, Lee, Tsiporin, Heese, Serranho, Pieper, Ivanyshyn, Eckel, Yaman, Schuft, Altuntag, von denen ich wichtige Aspekte und Anregungen zu meinen Forschungen erhalten habe und die mir wertvolle Unterstützung geleistet haben. Ferner danke ich den Kolleginnen und Kollegen am Institut, d.h. de Vries, Knauff, Brosowski, Gonzales, Spasov, Mohsen, Kirsch, Zinn, Chapko, Gerlach, Yoon, Meyer, Mönch, Hähner, Kühn, Potthast, Akduman, Lee, Serranho, Ivanyshyn, Eckel, Delbary, Erhard, Schulz, Vintonyak, Tezel, Yaman, Schuft, mit denen gemeinsame Publikationen entstanden sind. Diese Liste schließt die Doktoranden und Humboldt und DAAD und andere Stipendiaten am Institut mit ein.

Ich habe mich fast vierzig Jahre an der Georgia-Augusta wohl gefühlt bei Arbeitsbedingungen, die zu Beginn exzellent waren und die nach wieder-

¹⁰ Colton, D. and Kress, R.: *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. 2nd. ed. Springer, Berlin 1998.

holten Einspareinschnitten nun gerade noch als erträglich betrachten werden können. Hinsichtlich der Forschung ist unser Institut extrem Drittmittel abhängig geworden. Im zeitlichen Mittel waren dies dann zusammenfassend durchaus recht gute Arbeitsbedingungen für meine wissenschaftliche Arbeit. Dafür danke ich meiner Universität. Ich danke insbesondere dafür, dass mir Vertrauen und Zeit gegeben wurde, mein Forschungsfeld hier in Göttingen aufzubauen und zu entwickeln. Als ich 1971 nach Göttingen kam, hatte ich noch keine Drittmittel eingeworben, ich hatte nur marginale internationale Kontakte und ich hatte noch keine Diplomanden und Doktoranden zum Abschluß geführt, d.h. auf heutige Verhältnisse übertragen hätte ich mich wohl nicht erfolgreich um eine Juniorprofessur bewerben können. Die Forschungslandschaft war noch anders strukturiert und die Universitäten bzw. die sie tragenden Bundesländer erachteten es noch als ihre Pflicht, den Professoren, die sie berief, auch hinreichend Personal- und Sachmittel zur Wahrnehmung ihrer Aufgaben in Forschung und Lehre bereitzustellen.

Die Pflicht der Professorinnen und Professoren, durch Evaluierung ihrer Forschung und Lehre der Gesellschaft Rechenschaft zu legen, ist unbestritten, und auch die Notwendigkeit, an der Ausstattung des Forschungspotentials der Universität durch die Einwerbung von Drittmitteln mitzuwirken. Hier bekenne ich mich und stehe zu dem, was ich 1995 als Vizepräsident und Vorsitzender der Forschungskommission an die Direktorinnen und Direktoren der Institute geschrieben habe, nachdem der Senat einstimmig die erste interne Forschungsevaluation an unserer Universität beschlossen hatte.

Ziel dieser Evaluation soll sein:

- 1. Eine Dokumentation der Forschung an der Universität Göttingen zur Selbstdarstellung, zur Außendarstellung und als Rechenschaftsbericht über die zur Verfügung gestellten Mittel im Dialog mit Politik und Öffentlichkeit, sowie als Vorbereitung auf den von außen zu erwartenden Evaluationsdruck.*
- 2. Bereitstellung von Hilfen zur internen Qualitätssicherung und Qualitätsverbesserung sowie von Entscheidungshilfen für die Fakultätsräte und den Senat bei mittel- und langfristigen Planungs- und Strukturentscheidungen.*

Die Pflichten und Notwendigkeiten zur Evaluierung und Drittmittelwerbungen sind aber in der letzten Dekade überdehnt worden. Insbesondere ist die Evaluierung entgegen der ursprünglichen Intentionen nicht auf die Einrichtungen bezogen geblieben, sondern ist stark personalisiert worden. Wir haben einen monströsen Evaluierungsapparat aufgebaut, der Publikationen und Drittmittel abzählt und damit leistungsorientierte Mittelvergabe legitimiert. Wir bitten die Professorinnen und Professoren, die ein Forschungs-

semester beantragen neben der Darstellung der geplanten Forschungsvorhaben auch um eine Darstellung der während des Forschungssemesters geplanten Aktivitäten hinsichtlich Drittmittelinwerbung einschließlich der zu erwartenden Eurobeträge. Wir belohnen exzellente Drittmittelanträge und verlieren dabei die Zeit, auch exzellente Forschung zu betreiben. Es fehlt eine ausreichende personelle Infrastruktur, die Professorinnen und Professoren bei der Detailarbeit an Drittmittelanträgen wirkungsvoll entlastet und ihnen Zeit gibt zur eigentlichen Aufgabe, der Forschung. Wir verschwenden wertvolles Forschungspotential, indem wir junge Forscherinnen und Forscher überlasten mit administrativen Aufgaben, die ihnen das Zeitbudget zu innovativer Forschung extrem beschneidet. Und wir verschwenden Forschungspotential, indem wir Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler, die weniger durchsetzungsfähig sind im Stress des Wettbewerbs um Stellen und Haushaltsmittel, den Weg auf Hochschulprofessuren unmöglich machen. Ich jedenfalls sehe mit großer Freude dem Stand des Emeritus entgegen, der mich von der Last der Evaluierung und Drittmittelinwerbung entbindet.

Meine Kritik und Unzufriedenheit mit den Bologna-Reformen und der Verschulung der Universitäten durch die Bachelor und Master Studiengänge will ich zum Abschluß positiv formulieren. Ich habe die Lehre als einen wichtigen Bestandteil meiner Aufgabe als Hochschullehrer betrachtet und sie mit Begeisterung wahrgenommen. Drei Jahre persönlicher Erfahrung mit dem Bachelor Studiengang haben mir gezeigt: dies ist nicht mehr das Studium, das ich vor fast 50 Jahren positiv erlebt habe, und nicht mehr die Lehre, die mich fast 40 Jahre mit Befriedigung erfüllt hat. Mir ist nicht wohl bei der Vorstellung, dass Humboldts Ideen von akademischer Ausbildung vollständig beerdigt worden sind. Studium muss mehr bleiben als Lernen und Vorbereiten auf Semesterprüfungen.

Ich danke daher den Initiatoren der Bologna-Reformen, ich danke deren eifrigen Verfechtern und ich danke allen, die nicht genügend gegen die schlechte Umsetzung der Bologna-Ideen gekämpft haben, in letztere schließe ich mich selbst ein, ich danke allen dafür, dass mir auf diese Weise der Abschied von der Lehre weniger schwer fällt.

Ihnen allen danke ich abschließend für Ihre Aufmerksamkeit und bitte zu einem kleinem Empfang im Vorraum der Aula.