

Konstruktion und Untersuchung radialer Basisfunktionen mit kompaktem Träger

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fachbereiche
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
HOLGER WENDLAND
aus Hildesheim

Göttingen 1996

D7

Referent: Prof. Dr. R. SCHABACK

Korreferent: Prof. Dr. J. WERNER

Tag der mündlichen Prüfung: 20. Juni 1996

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Interpolation mit radialen Basisfunktionen	3
3	Positiv definite Funktionen	6
3.1	Charakterisierungen	6
3.2	Folgerungen für Funktionen mit kompaktem Träger	8
3.3	Notwendige und hinreichende Bedingungen	10
4	Konstruktionsmethoden	13
4.1	Die Laplace-Methode	13
4.2	Konstruktion durch Integration	14
4.3	Die Operatoren I und D	15
4.4	Die Faltung	18
4.5	Beispiele	20
4.5.1	Die abgeschnittene Potenzfunktion	20
4.5.2	Der Euklidische Hut	20
4.5.3	Die Funktionen von Wu	21
4.5.4	Verbindung zwischen Euklidischem Hut und Wus Funktionen . .	22
5	Polynomiale Funktionen minimalen Grades	24
5.1	Allgemeines	24
5.2	Konstruktion	27
5.3	Hauptresultate	30
5.4	Thin-plate-spline-artige Funktionen	33
6	Fehler- und Konditionsabschätzungen	36
6.1	Asymptotisches Verhalten der Fouriertransformierten	36
6.1.1	Ungerade Raumdimension	36
6.1.2	Gerade Raumdimension	42
6.2	Fehlerabschätzungen	44
6.3	Konditionsabschätzungen	48
6.3.1	Abschätzungen für $\ A\ $	49
6.3.2	Abschätzungen für $\ A^{-1}\ $	51
6.3.3	Praktische Schranken	54
	Symbolverzeichnis	58
	Literatur	59

1 Einleitung

Approximation ist ein Bereich der numerischen Mathematik, der immer dann zum Tragen kommt, wenn bestimmte Funktionen oder exakte Lösungen von gegebenen Problemen nicht explizit angegeben oder nicht effizient ausgewertet werden können.

Ein Teilgebiet der multivariaten Approximation ist die Approximation und Interpolation mit radialen Basisfunktionen, die seit einigen Jahren gründlich untersucht wird. Hierbei wird die Interpolante bzw. Approximante als Linearkombination von Translaten einer festen Basisfunktion gebildet. In der Regel wird dabei die Basisfunktion als radial angenommen, d.h. ihr Wert an einer vorgegebenen Stelle x hängt nur von der euklidischen Norm $\|x\|$ von x ab. Dies bedeutet insbesondere, daß eine univariate Funktion als Funktion in der Norm als radiale Basisfunktion in einer oder auch jeder vorgegebenen Raumdimension fungieren kann.

Die Methodik läßt sich grob in Gitterverfahren und Scattered-data-Verfahren unterteilen (vgl. die Übersichtsartikel [9, 14, 15, 43, 47, 49]). Anwendungen finden sich im Bereich der Computer-unterstützten Konstruktion und Modellierung geometrischer Objekte CAGD ([47]) und bei dem Entwurf neuronaler Netze ([8]). Auch vereinzelte Versuche, Integralgleichungen [34] und Differentialgleichungen [67] mit radialen Basisfunktionen näherungsweise zu lösen, sind bereits unternommen worden und liefern Perspektiven für weitere Anwendungsmöglichkeiten.

Haben die klassischen radialen Basisfunktionen wie Multiquadrics, Thin-plate-splines und Potenzen den Vorteil einer einheitlichen Darstellung unabhängig von der Raumdimension, so besitzen sie gleichzeitig keinen kompakten Träger, was auch zur Folge hat, daß insbesondere bei der Approximation auf dem Gitter nicht mit den Funktionen selbst sondern mit Lokalisierungen, d.h. mit finiten Linearkombinationen der Basisfunktion als Ansatzfunktion gerechnet wird. Ferner bekommt man bei der Interpolation das zusätzliche Problem, daß die auftretenden Interpolationsmatrizen voll besetzt sind und daß die Interpolante viele Auswertungen der Basisfunktion nötig macht. Dies hat zu Präkonditionierungsverfahren [16] und speziellen Auswertverfahren [3, 43, 44] geführt.

Derartige Probleme lassen sich auf elegante Weise vermeiden, wenn man Basisfunktionen mit kompaktem Träger benutzt, sofern man eine von der zugrundeliegenden Raumdimension abhängige Darstellung akzeptiert. Erste Untersuchungen in dieser Richtung, die sich vor allem auf die Konstruktion radialer Basisfunktionen mit kompaktem Träger konzentrierten, findet man in [59, 64, 65]. Die dort konstruierten Funktionen haben den entscheidenden Nachteil, daß ihre Fouriertransformierten Nullstellen besitzen, was die Bestimmung asymptotischer unterer Schranken praktisch unmöglich macht. Diese aber sind wichtig für die Bestimmung des Konditionsverhaltens.

Die Arbeit ordnet sich in diesen Themenkreis ein und ist folgendermaßen aufgebaut. Zuerst wird in die Theorie der Interpolation mit radialen Basisfunktionen eingeführt, wobei nur die für das weitere Vorgehen wichtigen Aspekte vorgestellt werden. Eine ausführliche Einführung, auch vom Standpunkt der Approximation, findet man in den bereits erwähnten Übersichtsartikeln [9, 14, 15, 43, 47, 49]. Anschließend werden in Kapitel 3 die zugrundeliegenden Basisfunktionen untersucht. Hier wird schnell eine

Einschränkung auf die in diesem Zusammenhang relevanten positiv definiten Funktionen im Gegensatz zu den bedingt positiv definiten Funktionen erfolgen. In Kapitel 4 werden einige Konstruktionsmethoden vorgestellt, auf die in den folgenden Kapiteln zurückgegriffen wird. Im 5. Kapitel wird eine neue Klasse von positiv definiten radialen Funktionen mit kompaktem Träger konstruiert. Diese Funktionen bestehen innerhalb ihres Trägerbereiches aus einem univariaten Polynom, dessen Grad in Abhängigkeit von der Raumdimension und der vorgegebenen Glätte minimal ist. Ferner wird gezeigt, daß diese Funktionen bis auf einen konstanten Faktor durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt sind. Es werden effiziente Rekursionsformeln zur Berechnung hergeleitet. Teile dieses Kapitels wurden vorab in [60] veröffentlicht. Erste erfolgreiche Anwendungen dieser Basisfunktionen findet man in [19, 20]. Hat man diese Funktionen erst einmal zur Hand, so lassen sich mit ihnen durch die Konstruktionsmethoden des 4. Kapitels eine Vielzahl weiterer Funktionen konstruieren, was am Beispiel der Thin-plate-spline-artigen Funktionen demonstriert wird. Die Funktionen minimalen Grades haben gegenüber den bisher bekannten Funktionen den zusätzlichen Vorteil, eine nullstellenfreie Fouriertransformierte zu besitzen. Daher wird in Kapitel 6 zuerst eine asymptotische Entwicklung der Fouriertransformierten hergeleitet, die dann benutzt wird, um Aussagen über Approximationsgüte und Konditionsverhalten zu treffen.

Auch wenn in dieser Arbeit nicht auf Gittermethoden näher eingegangen wird, sei hier erwähnt, daß radiale Basisfunktionen mit kompaktem Träger den Vorteil haben, daß mit ihnen direkt und nicht mit Lokalisationen gerechnet werden kann. Da sie keine Strang-Fix-Bedingungen [66] erfüllen, haben sie den Nachteil, daß im sogenannten stationären Fall ein konstanter Fehler bei der Approximation auftritt. Im nichtstationären Fall läßt sich Konvergenz erreichen, wenn man eine Verschlechterung der Lokalität akzeptiert. In diesem Sinn gelten die Ergebnisse in [10] auch für die hier konstruierten Funktionen.

Es sei ferner bemerkt, daß positiv definite Funktionen mit kompaktem Träger, wie sie hier vorgestellt werden, sich zumindest im univariaten Fall auch zur Konstruktion periodischer Wavelets gemäß [41] eignen.

An dieser Stelle möchte ich mich bei meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr. Robert Schaback für die Möglichkeit einer zügigen Dissertation bedanken. Herrn Prof. Dr. Jochen Werner danke ich für die Übernahme des Korreferates. Weiterer Dank gebührt der Studienstiftung des deutschen Volkes und der Deutschen Forschungsgemeinschaft für deren Unterstützung.

2 Interpolation mit radialen Basisfunktionen

In diesem Kapitel werden die Grundlagen der multivariaten Interpolation mit radialen Basisfunktionen vorgestellt. Es dient zugleich als Motivation für die später konstruierten Funktionen.

Sind ein Raum \mathcal{T} von Funktionen $s : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, paarweise verschiedene Stützstellen $x_j \in \mathbb{R}^d, 1 \leq j \leq N$ und Werte $f_j \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq N$ gegeben, so lautet das zugehörige Interpolationsproblem mit Lagrange-Daten:

$$\text{Finde ein } s_f \in \mathcal{T} \text{ mit } s_f(x_j) = f_j, 1 \leq j \leq N.$$

Im univariaten Fall $d = 1$ läßt sich dieses Problem immer eindeutig lösen, sofern man für \mathcal{T} ein N -dimensionales Haarsches System wie z.B. die Polynome oder die trigonometrischen Polynome wählt. Ein Haarsches System zeichnet sich dadurch aus, daß es unabhängig von der Wahl der Stützstellen $x_j \in \mathbb{R}$ ist. Dies ist im multivariaten Fall $d \geq 2$ nach einem Satz von Mairhuber (vgl. [33]) nicht mehr möglich.

Satz 2.1 *Eine kompakte Menge $M \subseteq \mathbb{R}^d$ enthalte wenigstens $N \geq 2$ Punkte. Dann gilt: Es existiert für $C(M)$ ein N -dimensionales Haarsches System genau dann, wenn M homöomorph zu einer abgeschlossenen Teilmenge eines Kreisrandes ist. \square*

Will man also auch im mehrdimensionalen Raum interpolieren, muß man den Funktionenraum \mathcal{T} von den „centers“ x_j aus $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ abhängig gestalten. Ein einfacher Zugang besteht darin \mathcal{T} als lineare Hülle der x_j -Translate einer festen Funktion $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ zu wählen, d.h.

$$\mathcal{T} \equiv \mathcal{T}(\Phi, X) := \text{span}\{\Phi(\cdot - x_1), \dots, \Phi(\cdot - x_N)\}.$$

Dabei nennt man Φ Basisfunktion. Läßt sich $\Phi(x) = \phi(\|x\|)$ schreiben mit einem $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ und der euklidischen Norm $\|\cdot\|$, so heißt Φ bzw. ϕ radiale Basisfunktion.

In dieser Arbeit wird $\|\cdot\|$ grundsätzlich für die euklidische Vektornorm oder die zugehörige Matrixnorm stehen. Andere Normen werden durch Indizierung kenntlich gemacht. Ebenso wird ϕ grundsätzlich eine univariate Funktion $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnen und $\Phi(x) = \phi(\|x\|)$ in diesem Zusammenhang die zugehörige d -variate Funktion.

Die bisher am meisten untersuchten Basisfunktionen sind

$$\begin{aligned} \phi(r) &= e^{-\beta r^2}, & \beta > 0, & & \text{Gaußglocken,} \\ \phi(r) &= r^\beta, & \beta > 0, \beta \notin 2\mathbb{N}, & & \text{Potenzen,} \\ \phi(r) &= r^\beta \log(r), & \beta \in 2\mathbb{N}, & & \text{Thin-plate-splines,} \\ \phi(r) &= (r^2 + c^2)^{\beta/2}, & \beta \notin 2\mathbb{N}, c > 0, & & \text{(inverse) Multiquadrics.} \end{aligned}$$

Ist eine Basisfunktion Φ gewählt und liegen paarweise verschiedene Stützpunkte $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subseteq \mathbb{R}^d$ vor, so lassen sich die Koeffizienten α_j der Interpolanten

$$s_f(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x - x_j)$$

eindeutig bestimmen, sofern die Interpolationsmatrizen

$$A_{\Phi, X} = (\Phi(x_j - x_k))_{1 \leq j, k \leq N}$$

invertierbar sind. Dies ist aber nicht für alle oben zitierten radialen Basisfunktionen der Fall, so daß dann üblicherweise ein multivariates Polynom zur Bildung der Interpolanten hinzugezogen wird, d.h. man setzt

$$s_f(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x - x_j) + p(x). \quad (2.1)$$

Um den Grad des Polynomes festzulegen und alle bekannten Basisfunktionen zu klassifizieren, führt man den für diese Theorie prägenden Begriff der bedingten positiven Definitheit ein.

Definition 2.2 *Eine stetige Funktion $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ heißt bedingt positiv semidefinit der Ordnung m auf \mathbb{R}^d , falls für beliebige paarweise verschiedene Punkte $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^d$ und beliebige reelle Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ mit*

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j x_j^p = 0 \quad |p| < m, p \in \mathbb{N}_0^d$$

die Ungleichung

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \alpha_j \alpha_k \Phi(x_j - x_k) \geq 0$$

erfüllt ist. Tritt dabei Gleichheit nur für $\alpha_1 = \dots = \alpha_N = 0$ auf, so nennt man Φ bedingt positiv definit der Ordnung m auf \mathbb{R}^d , $\Phi \in \mathbf{bpd}(m, d)$. Eine bedingt positiv (semi)definite Funktion der Ordnung Null heißt auch positiv (semi)definite Funktion. Die Menge aller Funktionen $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, für die $\Phi(x) := \phi(\|x\|)$, $x \in \mathbb{R}^d$ positiv definit ist, bezeichnen wir mit \mathbf{PD}_d .

In diesem Sinn fassen wir die univariate Funktion $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ auch als multivariate Funktion $\Phi(x) = \phi(\|x\|)$ auf. Damit ist klar, was z.B. $\phi \in L_1(\mathbb{R}^d)$ oder „ ϕ ist positiv definit auf dem \mathbb{R}^{d_a} “ bedeuten soll. Insbesondere sehen wir ϕ auch als Funktion auf ganz \mathbb{R} vermöge $\phi(-t) = \phi(t)$ an. Auf diese Funktion beziehen sich dann Aussagen, die z.B. die Glätte von ϕ um Null betreffen.

Φ ist also genau dann positiv definit, wenn alle Interpolationsmatrizen $A_{\Phi, X}$ positiv definit sind. Die Theorie dieser Funktionen steht im Mittelpunkt des nächsten Kapitels.

Bezeichnet man mit \mathbb{IP}_m^d die Menge aller d -variater Polynome vom Gesamtgrad kleiner als m und mit $Q := \dim \mathbb{IP}_m^d$, sowie mit p_1, \dots, p_Q eine Basis von \mathbb{IP}_m^d , so wählt man für die Interpolante in (2.1) ein $p \in \mathbb{IP}_m^d$, sofern $\Phi \in \mathbf{bpd}(m, d)$. Die zusätzlich auftretenden Freiheitsgrade bindet man mit den Forderungen

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j p_k(x_j) = 0 \quad \text{für } 1 \leq k \leq Q.$$

Dies führt dazu, das System

$$\begin{pmatrix} A_{\Phi, X} & P \\ P^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

mit den Matrizen $A_{\Phi, X}$ wie oben und $P = (p_\ell(x_j))_{1 \leq j \leq N, 1 \leq \ell \leq Q}$ und den Vektoren $\alpha \in \mathbb{R}^N$, $\beta \in \mathbb{R}^Q$ und $f \in \mathbb{R}^N$ zu lösen. Der folgende Satz rechtfertigt den eingeführten Formalismus, einen Beweis findet man z. B. in [24, 31, 46, 59].

Satz 2.3 *Ist $\Phi \in \text{bpd}(m, d)$ und ist $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Menge paarweise verschiedener Punkte, so ist das System (2.2) immer lösbar. Enthält X eine unisolvente Teilmenge, d.h. ist P injektiv, so ist die Lösung sogar eindeutig. \square*

Wir wollen nun noch einige wünschenswerte Eigenschaften der zugrundeliegenden Basisfunktion formulieren, die von den traditionellen Funktionen nicht vollständig erfüllt werden und Anlaß geben, neue zu suchen.

Um eine möglichst effiziente und lokale Auswertung möglich zu machen, sollte kein Polynomanteil benötigt werden, um die Interpolante zu berechnen. Mit anderen Worten Φ sollte positiv definit sein.

Damit das Prinzip der Lokalität, welches von den B-Splines her bekannt ist, auch hier zum Tragen kommt, muß die verwendete Basisfunktion kompakten Träger haben. Dabei verstehen wir unter dem Träger einer Funktion f wie üblich die Menge $\text{supp } f = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$. Dies ermöglicht eine effiziente Berechnung und Auswertung der Interpolanten. Verfahren dafür wurden bereits untersucht (vgl. [47]).

Es sollte eine vernünftige Konditions- und Fehlerabschätzung im Sinne von [5, 37, 38, 39, 48, 63] durchführbar sein.

Abschließend sei bemerkt, daß auch Hermite-ähnliche Datentypen mit Hilfe radialer Basisfunktionen interpoliert werden können. Näheres findet man z.B. in den Arbeiten [25, 40, 62].

3 Positiv definite Funktionen

3.1 Charakterisierungen

Es soll jetzt auf die in der Literatur bekannten Ergebnisse über (bedingt) positiv definite Funktionen eingegangen werden. Dabei wird kein allzu großer Wert auf eine zeitlich korrekte Darstellung gelegt. Vielmehr werden zuerst die bedingt positiv definiten Funktionen abgehandelt, da diese aufgrund des nachstehenden Satzes 3.8 für diese Arbeit eine geringere Bedeutung haben als die positiv definiten Funktionen, die ihrerseits schon lange vor den bedingt positiv definiten Funktionen untersucht wurden.

Die erste vollständige Erfassung aller bekannten radialen Basisfunktionen als bedingt positiv definite Funktionen gelang durch die Arbeit von Micchelli [35], die eine Verallgemeinerung eines Resultates von Schoenberg [52] ist. Zur Vorbereitung geben wir die Definition

Definition 3.1 *Eine Funktion $\phi \in C^\infty(0, \infty)$ heißt vollständig monoton auf $(0, \infty)$, falls für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und alle $r \in (0, \infty)$ gilt $(-1)^m \phi^{(m)}(r) \geq 0$.*

Die vollständig monotonen Funktionen haben die bemerkenswerte Eigenschaft, daß sie sich als Laplacetransformierte gewisser Maße darstellen lassen. Genauer gilt die Charakterisierung nach Bernstein ([4, 61]).

Satz 3.2 (Bernstein) *Die Funktion $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann vollständig monoton, wenn es eine monoton wachsende Funktion β mit $\int_0^\infty d\beta(\rho) < \infty$ gibt, so daß*

$$\phi(r) = \int_0^\infty e^{-r\rho} d\beta(\rho)$$

gilt.

□

Schoenberg hat nun alle univariaten Funktionen, die auf jedem \mathbb{R}^d eine positiv definite Funktion darstellen, klassifiziert.

Satz 3.3 (Schoenberg) *Die Funktion $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ sei nicht konstant. Dann induziert sie auf jedem \mathbb{R}^d eine positiv definite Funktion $\Phi(x) = \phi(\|x\|)$ genau dann, wenn $\phi(\sqrt{\cdot})$ vollständig monoton ist, d.h. genau dann wenn sie die Darstellung*

$$\phi(r) = \int_0^\infty e^{-\rho r^2} d\beta(\rho)$$

mit einem β , welches die Bedingungen des vorherigen Satzes erfüllt, besitzt.

□

Für Funktionen dieser Art lassen sich alle wichtigen Aussagen wie z.B. Konditions- und Fehlerabschätzungen auf die entsprechenden Aussagen der Gaußglocke reduzieren. Dieses wird zum Teil in [36, 37, 39] ausgeführt. Allerdings besitzen unter den bekannten Basisfunktionen neben der Gaußglocke nur noch die (inversen) Multiquadrics mit $\beta < -d$ eine solche Darstellung.

Satz 3.4 (Micchelli) Sei $m \in \mathbb{N}_0$. Ist $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $\phi \notin \mathbb{IP}_{m+1}^1$ und $(-1)^m \phi^{(m)}$ vollständig monoton auf $(0, \infty)$, so ist $\Phi(x) := \phi(\|x\|^2)$ bedingt positiv definit der Ordnung m auf jedem \mathbb{R}^d . \square

Micchelli selbst vermutete in seiner Arbeit, daß die Bedingung nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig ist. Der Beweis für diese Richtung wurde dann schließlich von Guo, Huo, Sun in [22] gegeben.

Die klassischen Basisfunktionen, die in Kapitel 2 angegeben wurden, lassen sich, wie bereits erwähnt, vermöge dieses Satzes vollständig unter dem Begriff bedingt positiv definit einordnen. Sie alle sind damit nicht nur auf einem bestimmten \mathbb{R}^d (bedingt) positiv definit, sondern auf jedem \mathbb{R}^d , und sie alle haben keinen kompakten Träger. Daß dieser Zusammenhang kein Zufall ist, folgt letztlich aus dem Satz von Bernstein. Wir werden später noch genauer darauf eingehen.

Um eine Charakterisierung (bedingt) positiver definiter Funktionen in Abhängigkeit von der Raumdimension zu erhalten, benutzt man in der Regel die Fouriertransformation. Eine erste Aussage in dieser Richtung stammt von Bochner [6, 7], die wir nach [13] zitieren.

Satz 3.5 (Bochner) Sei $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist Φ positiv semidefinit genau dann, wenn es ein positives, beschränktes Radonmaß μ gibt mit

$$\Phi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix^T \omega} d\mu(\omega).$$

\square

Da wir später nur noch an Funktionen interessiert sind, die klassisch fouriertransformierbar sind und es eine große Auswahl an Literatur sowohl über klassische (z.B. [53]) als auch über distributionelle (z.B. [26, 27], aber auch [24]) Fouriertransformation gibt, begnügen wir uns hier mit wenigen, für uns interessanten Aussagen.

Für eine Funktion $\Phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ erklärt man die d -variate Fouriertransformierte $\hat{\Phi}$ durch

$$\hat{\Phi}(x) := (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\omega) e^{-ix^T \omega} d\omega.$$

Radiale Funktionen besitzen auch eine radiale Fouriertransformierte. Diese läßt sich als univariates Integral ausdrücken (vgl. [53] unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Normierung). J_ν bezeichnet dabei die Besselfunktion der 1. Art der Ordnung ν

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m+\nu}}{m! \Gamma(m + \nu + 1)}.$$

Satz 3.6 Sei $\Phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und $\Phi(x) = \phi(\|x\|)$. Dann ist auch $\hat{\Phi}$ eine Funktion in $r = \|x\|$, und es gilt

$$\hat{\Phi}(x) \equiv \mathcal{F}_d \phi(r) = r^{-\frac{d-2}{2}} \int_0^{\infty} \phi(t) t^{\frac{d}{2}} J_{\frac{d-2}{2}}(rt) dt. \quad (3.1)$$

□

Wir benutzen hier den Operator \mathcal{F}_d für univariate Funktionen. Er ist durch den rechten Ausdruck in (3.1) definiert und läßt sich gemäß Satz 3.6 als Fouriertransformierte radialer Funktionen interpretieren. Da mit Ausnahme der Gaußlocken und der inversen Multiquadrics für $\beta < -d$ keine der in Kapitel 2 genannten Funktionen klassisch fouriertransformierbar ist, diese aber höchstens polynomial wachsen, geht man dort zu distributionellen Fouriertransformierten über, von denen man zeigt, daß sie auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ mit einer Funktion übereinstimmt, die höchstens eine algebraische Singularität an Null hat. In [24, 48] findet man Tabellen, in denen diese verallgemeinerten Fouriertransformierten angegeben sind.

Mit dieser Technik gelang es Iske in [24], eine Verallgemeinerung des Satzes von Bochner anzugeben (vgl. auch [55]), die ebenfalls nicht auf den Fall radialer Funktionen beschränkt ist.

Satz 3.7 Sei $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Φ besitze eine verallgemeinerte Fouriertransformierte $\varphi : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, für die ein $s \in \mathbb{R}$ existiert, so daß $\varphi(\omega) \|\omega\|^s$ um Null integrierbar ist. Dann sind äquivalent:

(a) Φ ist bedingt positiv definit der Ordnung $m \geq s/2$ auf \mathbb{R}^d .

(b) $\varphi(\omega) \geq 0$ für alle $\omega \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $\varphi \not\equiv 0$. □

3.2 Folgerungen für Funktionen mit kompaktem Träger

Wir wollen hier einige Folgerungen aus den vorherigen Sätzen formulieren, die wir teilweise bereits angekündigt haben.

Satz 3.8 Ist Φ eine bedingt positiv definite Funktion der Ordnung m auf \mathbb{R}^d und besitzt Φ einen kompakten Träger, so ist Φ bereits positiv definit auf dem \mathbb{R}^d .

Beweis: Da Φ stetig ist und kompakten Träger hat, liegt es in $L^1(\mathbb{R}^d)$. Daher stimmen klassische und verallgemeinerte Fouriertransformierte überein und erfüllen (b) in Satz 3.7. Insbesondere kann $s = 0$ gewählt werden, was die Behauptung liefert. \square

Dieser Satz begründet also, warum im folgenden nur noch positiv definite Funktionen von Interesse sind. Er ist im Hinblick auf das Interpolationsproblem nicht erstaunlich, da bei bedingter positiver Definitheit der Ordnung $m > 0$ ein Polynom zur Bildung der Interpolante hinzugezogen wird.

Der nächste Satz greift den Zusammenhang zwischen kompaktem Träger und Unabhängigkeit von der Raumdimension auf.

Satz 3.9 *Die Funktion $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ habe den Träger $[0, 1]$. Dann kann $\Phi_d : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi_d(x) := \phi(\|x\|)$ nicht für jede Raumdimension d positiv definit sein. D.h. die Darstellung einer radialen Basisfunktion mit kompaktem Träger muß von der Raumdimension abhängen.*

Beweis: Nimmt man an, daß $\phi \in \mathbf{PD}_d$ für alle $d \in \mathbb{N}$ gilt, so gibt es nach dem Satz von Schoenberg eine monoton wachsende Funktion β mit

$$\phi(r) = \int_0^\infty e^{-\rho r^2} d\beta(\rho).$$

Da aber für $r \geq 1$ bereits $\phi(r) = 0$ ist, muß $\beta \equiv 0$ sein, also auch $\phi \equiv 0$. Dann ist aber ϕ nur positiv semidefinit. \square

Als letztes wollen wir noch eine Folgerung aus dem Satz von Bochner notieren. Dieser Satz besagt insbesondere, daß für eine positiv definite Funktion auf dem \mathbb{R}^d , bzw. für eine Funktion mit positiver Fouriertransformierten, die Fouriertransformierte wieder in $L^1(\mathbb{R}^d)$ liegt.

Satz 3.10 *Ist $\Phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$, so sind äquivalent*

- 1) Φ ist positiv definit.
- 2) $\hat{\Phi} \geq 0, \neq 0$.

Beweis: Um den Satz von Bochner anwenden zu können, ist in beiden Fällen nur zu zeigen, daß $\hat{\Phi} \in L_1(\mathbb{R}^d)$ liegt. Dies folgt aber aus Folgerung 4.2 in [24], da in beiden Fällen Φ eine positiv definite reguläre Distribution erzeugt. Um schließlich auf positive Definitheit zu kommen, benutzt man die Analytizität der Exponentialfunktion, die bekannte Identität

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \alpha_j \alpha_k \Phi(x_j - x_k) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\Phi}(\omega) \left| \sum_{j=1}^N \alpha_j e^{ix_j^T \omega} \right|^2 d\omega,$$

und die Tatsache, daß aus der Stetigkeit von $\hat{\Phi}$ und aus $\hat{\Phi} \geq 0, \neq 0$ folgt, daß $\hat{\Phi}$ mindestens auf einer offenen Menge echt positiv ist. \square

3.3 Notwendige und hinreichende Bedingungen

Da die Charakterisierung positiv definiter Funktionen nach dem Satz von Bochner von eher theoretischer Natur ist, sollen in diesem Abschnitt einige notwendige und hinreichende Bedingungen zusammengestellt werden. Aus der Definition folgt fast unmittelbar

Lemma 3.11 *Sei $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ eine gerade, positiv definite Funktion. Dann gilt*

$$1) \Phi(0) > 0,$$

$$2) |\Phi(x)| \leq \Phi(0), \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad \square$$

Da jeder \mathbb{R}^d in natürlicher Weise in einem \mathbb{R}^k mit $k \geq d$ eingebettet ist, überträgt sich diese Eigenschaft auch auf die Mengen der positiv definiten Funktionen.

Bemerkung 3.12 *Für die Mengen der positiv definiten Funktionen gilt*

$$\mathbf{PD}_1 \supseteq \mathbf{PD}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathbf{PD}_d \supseteq \mathbf{PD}_{d+1} \supseteq \cdots.$$

□

Weitere notwendige Bedingungen für positiv definite Funktionen findet man z.B. in dem Übersichtsartikel von Stewart [54].

Die folgende, sehr einfache hinreichende Bedingung für positiv definite Funktionen in \mathbb{R} wurde bereits 1918 von Polyá [42] gegeben.

Satz 3.13 (Polyá) *Sei $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, gerade und konvexe Funktion, für die auch $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = 0$ gilt. Dann ist Φ positiv semidefinit.* □

Eine Reihe weiterer hinreichender und notwendiger Bedingungen für den univariaten Fall findet man in dem Buch von Lukacs [30]. Eine Verallgemeinerung des Kriteriums von Polyá auf den multivariaten Fall gelang Askey [1] und Trigub [56] unabhängig von einander. Besonders interessant an dieser Verallgemeinerung für radiale multivariate Funktionen ist, daß die positive Definitheit durch eine einfache Forderung an die radiale Funktion erreicht wird. Im folgenden Satz und auch später bezeichnet $[x]$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

Satz 3.14 *Sei $\phi \in C^{[d/2]+2}(\mathbb{R}_{\geq 0})$. Es gelte $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r) = 0$ und*

$$(-1)^{[d/2]+2} \phi^{[d/2]+2} \geq 0, \neq 0.$$

Dann ist $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(x) = \phi(\|x\|)$ positiv definit auf dem \mathbb{R}^d . □

Der Satz wurde hier in einer etwas stärkeren Form formuliert, um nicht nur Semidefinitheit zu erhalten. Trigub forderte zusätzlich noch, daß auch $\lim_{r \rightarrow 0} r^{\lfloor d/2 \rfloor + 1} \phi^{\lfloor d/2 \rfloor + 1}(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\lfloor d/2 \rfloor + 1} \phi^{\lfloor d/2 \rfloor + 1}(r) = 0$ gilt, was aber nach Lévy [29] schon aus der Konvexitätsforderung des Satzes folgt. Wir wollen hier kurz auf den Beweis eingehen, da dort bereits die für uns im weiteren wichtige Funktion

$$\psi_\ell(r) = (1 - r)_+^\ell$$

auftritt. Die übliche Vorgehensweise ist, genauso wie im nächsten Satz, die Positivität der Fouriertransformierten nachzuweisen, also den Satz von Bochner bzw. Satz 3.10 anzuwenden. Ferner benutzt man die Darstellung der Fouriertransformation radialer Funktionen (3.1), die für $r > 0$ nach Variablensubstitution

$$\mathcal{F}_d \phi(r) = r^{-d} \int_0^\infty \phi(t/r) t^{\frac{d}{2}} J_{\frac{d-2}{2}}(t) dt$$

lautet. Nun wird partiell integriert und ausgenutzt, daß die iterierte Stammfunktion $f_0(r) = f(r)$, $f_k(r) = \int_0^r f_{k-1}(s) ds$ sich für $k \geq 1$ schreiben läßt als

$$f_k(r) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^r (r-s)^{k-1} f(s) ds.$$

Berücksichtigt man, daß nach der bereits zitierten Arbeit von Lévy [29] die folgenden Integrale existieren und die Randterme bei der partiellen Integration verschwinden, so gelangt man zu

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_d \phi(r) &= \frac{r^{-d-k-2}}{(k+1)!} \int_0^\infty (-1)^{k+2} \phi^{(k+2)}(t/r) \int_0^t (t-s)^{k+1} s^{\frac{d}{2}} J_{\frac{d-2}{2}}(s) ds dt \\ &= \frac{r^{-d-k-2}}{(k+1)!} \int_0^\infty (-1)^{k+2} \phi^{(k+2)}(t/r) \mathcal{F}_d \psi_{k+1}(t) dt. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Setzt man nun $k = \lfloor d/2 \rfloor$, so sieht man, daß man nur noch zeigen muß, daß $\psi_\ell \in \mathbf{PD}_d$ für $\ell \geq \lfloor d/2 \rfloor + 1$ gilt. Man hat also das Integral

$$\int_0^t (t-s)^{k+1} s^{\frac{d}{2}} J_{\frac{d-2}{2}}(s) ds$$

zu untersuchen. Darauf werden wir im Rahmen der Konditionsabschätzungen näher eingehen.

Daß dieser Satz tatsächlich nur eine hinreichende Bedingung liefert, erkennt man zum einen bereits an (3.2), schließlich muß nur das gesamte Integral nichtnegativ werden, zum anderen zeigen dies die später konstruierten Funktionen. Dieses Kriterium scheint

allgemein nicht geeignet zu sein, um glatte positiv definite Funktionen mit kompaktem Träger zu konstruieren, da diese aufgrund ihrer Gestalt einen Krümmungswechsel erfordern.

Die radiale Darstellung der Fouriertransformierten einer radialen Funktion ϕ ist auch Ausgangspunkt des nächsten Kriteriums, welches von Wu in [65] angegeben wird. Auch hierfür wird partiell integriert, diesmal aber unter Ausnutzung der Tatsache, daß $z^\nu J_\nu(z)$ eine Stammfunktion von $z^\nu J_{\nu-1}(z)$ (siehe [57] Seite 45) ist. Auf diese Weise läßt sich die $2n + 1$ -variate Fouriertransformierte $\mathcal{F}_{2n+1}\phi$ auf die univariate Fouriertransformierte $\mathcal{F}_1\phi$ zurückspielen. Wir werden im nächsten Kapitel näher auf diesen Zusammenhang eingehen.

Satz 3.15 Sei $\Phi = \phi(\|\cdot\|) \in L_1(\mathbb{R}^{2n+1})$ und stetig. Der Operator Q sei definiert durch $\phi(r) =: (Q\phi)(r^2/2)$. Es gilt $\phi \in \mathbf{PD}_{2n+1}$ genau dann, wenn für $0 \leq \ell \leq n$

$$(-1)^\ell \frac{d^\ell}{dr^\ell}(Q\mathcal{F}_1\phi) \geq 0, \neq 0$$

gilt.

□

4 Konstruktionmethoden

In diesem Kapitel sollen verschiedene Methoden vorgestellt werden, wie sich positiv definite (radiale) Funktionen konstruieren lassen. Es handelt sich dabei nur um eine Auswahl, und es wird Wert auf explizite Berechenbarkeit gelegt. Da wir regelmäßig Satz 3.10 anwenden, um die positive Definitheit einer Funktion nachzuweisen, gehen wir immer davon aus, daß benötigte Funktionen integrierbar sind. Dies ist insbesondere immer dann gegeben, wenn sie stetig sind und kompakten Träger besitzen.

4.1 Die Laplace-Methode

Wir benutzen in diesem Abschnitt den Laplace-Operator zur Konstruktion neuer radialer Basisfunktionen. Für eine zweimal auf dem \mathbb{R}^d stetig differenzierbare Funktion $\Phi(x) = \phi(\|x\|)$ gilt mit $r = \|x\|$ bekanntlich

$$\Delta\Phi(x) = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j^2}(x) = \phi''(r) + \frac{d-1}{r} \phi'(r).$$

Satz 4.1 *Sei Φ positiv definit auf \mathbb{R}^d und eine zweimal stetig differenzierbare und integrierbare Funktion. Dann ist auch $-\Delta\Phi$ positiv definit.*

Beweis: Der Beweis benutzt die bekannten Zusammenhänge zwischen Fouriertransformation und Differentiation. Damit erhält man

$$-\widehat{\Delta\Phi}(x) = -\sum_{j=1}^d \widehat{\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j^2}\right)}(x) = \sum_{j=1}^d x_j^2 \hat{\Phi}(x) = \|x\|^2 \hat{\Phi}(x).$$

Aus $\hat{\Phi} \geq 0, \neq 0$ folgt somit auch $-\widehat{\Delta\Phi} \geq 0 \neq 0$. \square

Ein Nachteil ist sicherlich, daß man bekannte positiv definite Funktionen benötigt, um neue zu konstruieren. Interessant ist aber, daß die entstehenden Funktionen Nullstellen besitzen müssen, was sie von den bisher bekannten unterscheidet, schließlich ist nach dem Beweis für $\Psi := -\Delta\Phi$

$$0 = \hat{\Psi}(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \Psi(x) dx = \frac{d\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(d/2 + 1)} \int_0^\infty \psi(r) r^{d-1} dr.$$

Diese Methode kann man als Verallgemeinerung einer Vorgehensweise zur Konstruktion von Wavelets ansehen, so ist z.B. das Mexican-Hat-wavelet durch

$$\psi(x) = -\frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2/2} = (1 - x^2) e^{-x^2/2}$$

definiert.

Zu erwähnen bleibt noch, daß Φ nicht notwendig radial sein muß, und daß diese Konstruktionsmethode kompakte Träger respektiert, d.h. hat Φ einen kompakten Träger, so natürlich auch $-\Delta\Phi$.

4.2 Konstruktion durch Integration

Bei dieser Methode wird wieder davon ausgegangen, daß bereits eine positiv definite, diesmal auch notwendig radiale Funktion auf dem \mathbb{R}^d existiert, mit der dann weitere konstruiert werden. Dies geschieht einfach, indem man die gegebene univariate Funktion gegen eine positive Funktion integriert. Dieses Verfahren liefert dadurch aus einer positiv definiten Funktion ganze Scharen von neuen Funktionen.

Satz 4.2 Sei $\phi \in \mathbf{PD}_d$ und $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion mit $K \geq 0, \neq 0$. Dann ist die Funktion

$$\psi(r) := \int_0^\infty \phi(r/t)K(t)dt$$

ebenfalls positiv definit in \mathbb{R}^d .

Beweis: Wir beginnen mit der Existenz des Integrals. Da ϕ positiv definit ist, gilt nach Lemma 3.11 $|\phi(t)| \leq \phi(0)$ also auch

$$\lim_{t \rightarrow 0} |\phi(r/t)| \leq \phi(0).$$

Damit folgt

$$\int_0^\infty |\phi(r/t)K(t)|dt \leq \phi(0) \int_0^\infty K(t)dt < \infty.$$

Die positive Definitheit ergibt sich nun einfach durch Einsetzen der Definition und aus der positiven Definitheit von ϕ . Denn sind x_1, \dots, x_N paarweise verschiedene Punkte im \mathbb{R}^d und $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ nicht alle gleich Null, so erhält man

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \alpha_j \alpha_k \psi(\|x_j - x_k\|) = \int_0^\infty \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \alpha_j \alpha_k \phi(\|x_j - x_k\|/t)K(t)dt > 0.$$

□

Es ist offensichtlich, daß dieses Verfahren nicht ohne weiteres einen kompakten Träger respektiert. Anders ist der Fall, wenn auch K kompakten Träger besitzt.

Korollar 4.3 Seien ϕ und K wie im Satz gegeben. Es gelte zusätzlich, daß $\text{supp } \phi, \text{supp } K$ in $[0, 1]$ liegen. Dann ist auch der Träger von ψ in $[0, 1]$ enthalten, und ψ läßt sich dort darstellen durch

$$\psi(r) = \int_r^1 \phi(r/t)K(t)dt.$$

□

Wir geben noch die Fouriertransformierte für ψ an, die sich in einfacher Weise aus der Fouriertransformierten von ϕ berechnen läßt und aus der ebenfalls die positive Definitheit von ψ folgt. Wir formulieren das Ergebnis nur für den Fall daß ϕ und K kompakten Träger haben.

Korollar 4.4 *Es mögen die Voraussetzungen des vorherigen Korollars gelten. Dann lautet die d -variate Fouriertransformierte von ψ*

$$\mathcal{F}_d\psi(r) = \int_0^1 s^d \mathcal{F}_d\phi(rs)K(s)ds.$$

Beweis: Der Beweis benutzt die radiale Darstellung der Fouriertransformierten radialer Funktionen und den Satz von Fubini, dessen Anwendung aufgrund der Voraussetzungen keine Schwierigkeiten macht. Mit der Definition von ψ erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_d\psi(r) &= r^{-d} \int_0^\infty \psi(t/r) t^{\frac{d}{2}} J_{\frac{d-2}{2}}(t) dt \\ &= r^{-d} \int_0^\infty \int_0^\infty t^{\frac{d}{2}} J_{\frac{d-2}{2}}(t) \phi(t/(rs)) K(s) ds dt \\ &= \int_0^\infty s^d (rs)^{-d} \int_0^\infty t^{\frac{d}{2}} J_{\frac{d-2}{2}}(t) \phi(t/(rs)) dt K(s) ds \\ &= \int_0^1 s^d \mathcal{F}_d\phi(rs) K(s) ds. \end{aligned}$$

□

4.3 Die Operatoren I und D

Wir kommen jetzt zu der wichtigsten Technik im Rahmen dieser Arbeit. Wie im letzten Kapitel beim Kriterium von Wu bereits angedeutet, läßt sich durch geschickte partielle Integration bei der radialen Fouriertransformierten, die d -variate Fouriertransformierte durch die $(d-2)$ -variate Fouriertransformierte ausdrücken [64]. Dies soll nun hier explizit vorgeführt werden. Eine Verallgemeinerung der hier aufgeführten Operatoren, die auch einen Übergang von d nach $d-1$ ermöglichen, findet man in [50], wobei dort allerdings eine etwas andere Notation für radiale Funktionen benutzt wird.

Wir beginnen mit der Definition der Operatoren I und D

Definition 4.5 Sei $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, für die jeweils eine der folgenden Operationen definiert ist. Dann setzen wir für $r \geq 0$

$$I\phi(r) := \int_r^\infty s\phi(s)ds, \quad (4.1)$$

$$D\phi(r) := -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \phi(r). \quad (4.2)$$

Für $r < 0$ werden die Funktionen gerade fortgesetzt, d.h. $I\phi(r) = I\phi(-r)$ und $D\phi(r) = D\phi(-r)$.

Wir notieren noch kurz eine Aussage für den Operator I , die analog auch für D gilt. Ein Beweis läßt sich durch einfaches Nachrechnen unter Berücksichtigung der Darstellung eines multivariaten Integrals einer radialen Funktion durch ein univariates Integral der Form

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(\|x\|)dx = \frac{d\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2 + 1)} \int_0^\infty \phi(r)r^{d-1}dr$$

angeben.

Bemerkung 4.6 $I\phi \in L_1(\mathbb{R}^d)$ ist äquivalent zu $\phi \in L_1(\mathbb{R}^{d+2})$. Es gilt dann

$$\int_{\mathbb{R}^d} (I\phi)(\|x\|)dx = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2 + 1)} \int_{\mathbb{R}^{d+2}} \phi(\|y\|)dy.$$

□

Nun wollen wir uns noch Gedanken darüber machen, wann der Operator D im folgenden auf eine gerade Funktion $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ angewandt werden kann.

Lemma 4.7 Für eine gerade $2k$ -mal stetig differenzierbare Funktion $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ verschwinden die ersten k ungeraden Ableitungen an der Stelle Null. Daher läßt sich der D -Operator k mal in dem Sinn anwenden, daß das Ergebnis $D^k\phi$ noch eine stetige Funktion ist.

Beweis: Es reicht die Behauptung für $k = 1$ zu beweisen. Da $\phi(t) = \phi(-t)$ gilt, ist $\phi'(t) = -\phi'(-t)$ und damit für $t = 0$ auch $\phi'(0) = -\phi'(0)$, was die erste Behauptung beweist. Für den zweiten Teil macht der Fall $t > 0$ kein Problem. Bei $t = 0$ ist

$$\phi(t) = \phi(0) + \mathcal{O}(t^2) \text{ für } t \rightarrow 0,$$

so daß

$$D\phi(t) = \mathcal{O}(1) \text{ für } t \rightarrow 0$$

folgt, was aber Stetigkeit in Null bedeutet. \square

Es gilt eine Umkehrung des Lemmas im folgenden Sinn. Ist ϕ eine gerade, um Null stetig differenzierbare Funktion, für die $D\phi$ in Null stetig ist, so ist ϕ in Null sogar zweimal stetig differenzierbar, denn schließlich ist $\phi''(0) = -\lim_{h \rightarrow 0} D\phi(h) = -D\phi(0)$. Genauso erhält man aus einem um Null stetigen ϕ ein um Null zweimal stetig differenzierbares $I\phi$.

Kommen wir zu der bereits erwähnten Möglichkeit die d -variate Fouriertransformierte auf die $(d-2)$ -variate, und natürlich umgekehrt, zurückzuführen (vgl [50, 64]).

Satz 4.8 *Zwischen den Operatoren I , D und \mathcal{F}_d bestehen die folgenden Relationen, sofern sämtliche Operationen wohldefiniert sind.*

- (1) *Die Operatoren I und D sind invers zueinander.*
- (2) *Für $I\phi \in L_1(\mathbb{R}^d)$ gilt $\mathcal{F}_d(I\phi) = \mathcal{F}_{d+2}\phi$.*
- (3) *Für $D\phi \in L_1(\mathbb{R}^d)$ gilt $\mathcal{F}_d(D\phi) = \mathcal{F}_{d-2}\phi$.*

Beweis: Die erste Aussage läßt sich durch einfaches Nachrechnen beweisen. Da sich die dritte Aussage aus den ersten beiden ergibt, reicht es also, die zweite Behauptung zu beweisen. Wie bereits angedeutet, verwenden wir partielle Integration bei der radialen Darstellung der Fouriertransformierten und benutzen, daß $z^\nu J_\nu(z)$ eine Stammfunktion von $z^\nu J_{\nu-1}(z)$ ist (vgl. [57] Seite 45), um

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_d(I\phi)(r) &= r^{-\frac{d-2}{2}} \int_0^\infty (I\phi)(t) t^{\frac{d}{2}} J_{\frac{d-2}{2}}(rt) dt \\ &= r^{-\frac{d}{2}} \left[(I\phi)(t) t^{\frac{d}{2}} J_{\frac{d}{2}}(rt) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \phi(t) t^{\frac{d+2}{2}} J_{\frac{d}{2}}(rt) dt \right] \\ &= \mathcal{F}_{d+2}\phi(r) \end{aligned}$$

zu erhalten. Dabei verschwinden die Randterme aufgrund des Verhaltens der Besselfunktion $J_\nu(z) = \mathcal{O}(z^\nu)$ für $\nu \geq 0$ und $z \rightarrow 0$ und $J_\nu(z) = \mathcal{O}(1/\sqrt{z})$ für $z \rightarrow \infty$ (vgl. wiederum [57] Seite 199) sowie der Tatsache, daß $I\phi \in L_1(\mathbb{R}^d)$. \square

Die Aussagen (2) und (3) liefern die Möglichkeit, positiv definite Funktionen durch folgende zwei Vorgehensweisen zu konstruieren. Entweder man beginnt mit einer sehr glatten positiv definiten Funktion in einem niedrig dimensionalen Raum und erreicht eine weniger glatte positiv definite Funktion in einem höher dimensionalen Raum durch iterierte Anwendung des Operators D , oder man geht genau den umgekehrten Weg. Man startet dann mit einer stetigen positiv definiten Funktion in einem höher dimensionalen Raum und gelangt zu einer glatteren Funktion in einem niedriger dimensionalen Raum durch wiederholte Anwendung des Operators I .

Korollar 4.9 *Ist ϕ eine $2k$ -fach stetig differenzierbare Funktion und $\phi \in \mathbf{PD}_d$, so ist $D^k\phi$ eine positiv definite Funktion in \mathbb{R}^{d+2k} . Ist andererseits ϕ eine positiv definite integrierbare Funktion in \mathbb{R}^d , so ist $I^k\phi$ eine positiv definite Funktion in \mathbb{R}^{d-2k} . \square*

Auf den ersten Blick erscheint die erste Vorgehensweise die einfachere zu sein, da man z.B. im univariaten Fall starten kann. Daher nutzte sie Wu auch in [64], um seine Funktionen zu konstruieren. Tatsächlich liefert die zweite Methode aber bessere Resultate, die Gegenstand des nächsten Kapitels sind.

Zum Schluß ist noch anzumerken, daß beide Operatoren kompakte Träger respektieren. Auch diese Methode benötigt als Ausgangsfunktion eine positiv definite Funktion, allerdings in einem anders dimensionaleren Raum.

4.4 Die Faltung

Alle bisher vorgestellten Konstruktionsverfahren haben vorausgesetzt, daß bereits eine positiv definite Funktion bekannt ist, um neue positiv definite Funktionen zu konstruieren. In diesem Abschnitt soll nun das einfachste Verfahren vorgestellt werden, mit dem man aus einer beliebigen integrierbaren und stetigen Funktion eine positiv definite Funktion konstruiert. Obwohl die Idee bestechend einfach ist, liegen die Probleme bei diesem Verfahren in der konkreten Durchführbarkeit.

Definition 4.10 *Für zwei integrierbare Funktionen $f, g \in L_1(\mathbb{R}^d)$ ist die Faltung $f * g$ definiert durch*

$$(f * g)(x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y)dy.$$

Der Faktor vor dem Integral dient nur der Normierung und wird sich gleich erklären. Sind f und g univariate Funktionen, die integrierbare, radiale Funktionen über \mathbb{R}^d induzieren, so ist auch deren \mathbb{R}^d -Faltung eine radiale Funktion, die wir mit

$$(f *_d g)(r)$$

bezeichnen.

Die so definierte Faltung ist im folgenden Sinn verträglich mit der Fouriertransformation. Wir werden später noch eine Faltung benutzen, die in gleicher Weise mit der Laplacetransformation verträglich ist.

Bemerkung 4.11 *Für Funktionen $f, g \in L_1(\mathbb{R}^d)$ ist auch $f * g \in L_1(\mathbb{R}^d)$, und es gilt $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$. \square*

Mit Satz 3.10 erhält man somit

Korollar 4.12 *Ist $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ eine stetige und nicht identisch verschwindende Funktion, so ist $f * f$ eine positiv definite Funktion über \mathbb{R}^d .* \square

Für praktische Zwecke ist es aber problematisch, Faltungen gerade in höher dimensionalen Räumen auszurechnen. Sind die zu faltenden Funktionen radial, so läßt sich die d -variate Faltung mittels der Operatoren I und D aus dem letzten Abschnitt in eine $(d - 2)$ variate Faltung überführen und umgekehrt [47, 50].

Satz 4.13 *Seien ϕ und ψ zwei gerade und stetige Funktionen.*

- (1) *Sind $I\phi, I\psi \in L_1(\mathbb{R}^{d-2})$, so gilt $\phi *_{d-2} \psi = D(I\phi *_{d-2} I\psi)$.*
 (2) *Sind $D\phi, D\psi \in L_1(\mathbb{R}^{d+2})$, so gilt $\phi *_{d+2} \psi = I(D\phi *_{d+2} D\psi)$.*

Beweis: Es reicht, die erste Behauptung zu beweisen, da sich die zweite aus der ersten folgern läßt. Wir benutzen Satz 4.8 unter Beachtung der Bemerkungen 4.6 und 4.11, um

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_d D(I\phi *_{d-2} I\psi) &= \mathcal{F}_{d-2}(I\phi *_{d-2} I\psi) \\ &= (\mathcal{F}_{d-2} I\phi)(\mathcal{F}_{d-2} I\psi) \\ &= (\mathcal{F}_d \phi)(\mathcal{F}_d \psi) \\ &= \mathcal{F}_d(\phi *_{d-2} \psi) \end{aligned}$$

zu erhalten. Unter Berücksichtigung der Stetigkeit von $\phi *_{d-2} \psi$ und $(I\phi) *_{d-2} (I\psi)$ folgt damit die Behauptung. \square

Es sollen noch kurz zwei weitere Motivationen für die Nutzung der Faltung angegeben werden. Man kann zum einen durch mehrfache Faltung die Glätte der entstehenden Funktion erhöhen, ohne dabei die Eigenschaft eines kompakten Trägers zu verlieren. Es ist also durchaus sinnvoll, auch positiv definite Funktionen weiter zu falten.

Betrachtet man andererseits die Interpolationsmatrix $A_{\Phi * \Phi, X}$ zu einer durch Faltung entstandenen Funktion $\Phi * \Phi$ mit einer positiv definiten Funktion Φ mit kompaktem Träger, so lauten die Eintragungen

$$\begin{aligned} \Phi * \Phi(x_j - x_k) &= \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x) \Phi(x_j - x_k - x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x - x_j) \Phi(x - x_k) dx \\ &= (\Phi(\cdot - x_j), \Phi(\cdot - x_k))_{L_2}. \end{aligned}$$

Also läßt sich das L_2 -Approximationsproblem, zu gegebenem $f \in C(\mathbb{R}^d)$ die beste L_2 -Approximation aus $\text{span}\{\Phi(\cdot - x_1), \dots, \Phi(\cdot - x_k)\}$ zu finden, mittels der Normalegleichungen und der Faltung auf das Interpolationsproblem $A_{\Phi * \Phi, X} \alpha = R$ mit $R_j = (f, \Phi(\cdot - x_j))_{L_2}$ zurückführen.

4.5 Beispiele

Ziel all dieser Methoden ist es, positiv definite Funktionen zu konstruieren. Dabei wird mit Ausnahme der Methode des letzten Abschnittes vorausgesetzt, daß bereits positiv definite Funktionen existieren. In diesem Abschnitt werden wir nun die bisher bekannten positiv definiten Funktionen mit kompaktem Träger vorstellen.

4.5.1 Die abgeschnittene Potenzfunktion

Wir beginnen mit der bereits in Kapitel 3 erwähnten abgeschnittenen Potenzfunktion. Diese Funktion wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit eine wichtige Rolle spielen.

Definition 4.14 Für reelles $\nu > 0$ bezeichnen wir die abgeschnittene Potenzfunktion mit

$$\psi_\nu(r) = (1 - r)_+^\nu = \begin{cases} (1 - r)^\nu & 0 \leq r \leq 1 \\ 0 & r \geq 1. \end{cases}$$

Aus dem Kriterium von Polyá folgt, daß diese Funktionen für $\nu \geq 1$ positiv definit über \mathbb{R} sind. Eine Verallgemeinerung dieser Aussage findet sich zwar teilweise nur für $\nu \in \mathbb{N}$ oder nur implizit in [1, 11, 21, 24, 56], doch decken diese Resultate den folgenden Satz ab. Auch wir werden im Rahmen der Konditionsabschätzung für den Fall $\nu \in \mathbb{N}$ auf den Beweis eingehen.

Satz 4.15 Sei $\nu \geq (d + 1)/2$. Dann ist ψ_ν positiv definit auf \mathbb{R}^d . □

4.5.2 Der Euklidische Hut

Die wohl einfachste positiv definite Funktion entsteht, wenn man die charakteristische Funktion der L_2 -Einheitskugel mit sich selber faltet. D.h. man bildet

$$X^{(d)}(r) = (\chi *_d \chi)(r)$$

mit

$$\chi(r) = \begin{cases} 1 & 0 \leq r \leq 1 \\ 0 & r > 1. \end{cases}$$

Bekanntlich erhält man im eindimensionalen Fall nach Reskalierung gerade die Funktion ψ_1 . Eine Verallgemeinerung auf den multivariaten Fall findet man in [59] und eine Beweisskizze in [47]. Es stellt sich heraus, daß die radiale Funktion innerhalb ihres Trägers $[0, 2]$ im Fall ungerader Raumdimension $d = 2n + 1$ durch ein Polynom vom Grad $2n + 1$ dargestellt wird. Im Fall gerader Raumdimension erhält man eine kompliziertere Funktion, die neben einem Polynom noch aus einem Wurzel- und einem arccos-Term besteht. Explizite Formeln findet man, wie bereits erwähnt, in [59]. Der Euklidische Hut hat den Vorteil, daß eine explizite Formel für jede Raumdimension existiert, er ist allerdings nur stetig.

4.5.3 Die Funktionen von Wu

Glattere positiv definite, radiale Funktionen, die innerhalb ihres Trägers aus einem Polynom bestehen, wurden für den Fall ungerader Raumdimension von Wu in [64] angegeben. Die Einschränkung auf ungerade Raumdimension ist wegen Bemerkung 3.12 nicht sonderlich hinderlich, und wir werden später auch gelegentlich darauf zurückgreifen.

Wu beginnt seine Konstruktion mit der Funktion

$$f_\ell(r) = (1 - r^2)_+^\ell$$

und erzwingt Glätte dabei durch den Ansatz in r^2 und geeignete Wahl des $\ell \in \mathbb{N}$. Da die d -variate Fouriertransformierte dieser Funktion

$$\mathcal{F}_d f_\ell(r) = 2^\ell \ell! r^{-(d/2)-\ell} J_{(d/2)+\ell}(r)$$

lautet, was man, unter Berücksichtigung der anderen Konstantenwahl, in [53] findet, und die Besselfunktionen Vorzeichenwechsel haben, ist diese Funktion auf keinem \mathbb{R}^d positiv definit. Deshalb wird

$$\phi_\ell = f_\ell *_1 f_\ell$$

gebildet, was eine auf \mathbb{R} positiv definite Funktion liefert. Schließlich wird der Operator D benutzt, um positiv definite Funktionen auf höher dimensionalen Räumen zu erhalten. Man bildet also

$$\phi_{\ell,k} = D^k \phi_\ell.$$

Wir notieren das Ergebnis mit einigen Aussagen über die Glätte und den Grad der resultierenden Funktion.

Satz 4.16 *Bei ungerader Raumdimension $d = 2n + 1$ gilt $\phi_{k+n,n} \in \mathbf{PD}_{2n+1} \cap C^{2k}$. Ferner wird $\phi_{k+n,n}$ innerhalb des Trägers durch ein Polynom vom Grad $\partial\phi_{k+n,n} = 2\lfloor d/2 \rfloor + 4k + 1$ dargestellt. \square*

Es sind noch einige Bemerkungen zu machen. Ist ϕ eine radiale Basisfunktion der Form

$$\phi(r) = \begin{cases} p(r) & 0 \leq r \leq 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases} \quad (4.3)$$

mit einem univariaten Polynom p , so wird mit $\partial\phi$ auch der Grad des zugehörigen Polynoms p bezeichnet. Die Funktionen von Wu müssen reskaliert werden, um den Träger $[0, 1]$ zu haben, was im weiteren aber nicht weiter erwähnt werden wird. Ferner hat eine Funktion dieser Form immer einen geraden Grad der Glätte um Null, da man $2k$ stetige Ableitungen genau dann erhält, wenn die ersten k ungeraden Koeffizienten in der Monomdarstellung von p verschwinden (vgl. auch Lemma 4.7).

Die Funktionen von Wu haben den Vorteil, daß man mit ihnen für jede Raumdimension d (vgl. Bemerkung 3.12) und jede Glätte $2k$ eine positiv definite Funktion der Form

(4.3) angeben kann. Es fehlen allerdings explizite Formeln, bei denen man die Koeffizienten zumindest rekursiv berechnen kann. Ferner ist der erreichte Polynomgrad, wie wir später sehen werden, zu hoch. Es ist sinnvoll, eine Funktion der Art (4.3) mit minimalem Grad anzugeben. Ein weiterer Nachteil ergibt sich aus der Berechnung der Fouriertransformierten. Es gilt mit $\ell = k + n$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{2n+1}\phi_{\ell,n}(r) &= \mathcal{F}_{2n+1}D^n\phi_{\ell}(r) \\ &= \mathcal{F}_1\phi_{\ell}(r) = (\mathcal{F}_1f_{\ell}(r))^2 \\ &\doteq r^{-d-2\ell}J_{d/2+\ell}^2(r).\end{aligned}$$

Dabei bezeichnen wir hier mit \doteq Gleichheit bis auf einen konstanten positiven Faktor. Man erkennt, daß die Fouriertransformierte gerade die Nullstellen der Besselfunktionen hat, was eine Bestimmung einer unteren Schranke unmöglich macht.

Die von Wu benutzte Technik läßt sich auch einsetzen, um die Existenz von positiv definiten C^∞ -Funktionen mit kompaktem Träger nachzuweisen. Denn beginnt man mit irgendeiner C_0^∞ -Funktion wie z.B.

$$f(r) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-r^2}} & 0 \leq r \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und bildet dann wie eben $\phi = f *_1 f$ und $\phi_k = D^k\phi$, so erhält man $\phi_k \in \mathbf{PD}_{2k+1} \cap C_0^\infty$.

4.5.4 Verbindung zwischen Euklidischem Hut und Wus Funktionen

Wir wollen noch auf einen auf den ersten Blick überraschenden Zusammenhang zwischen den Funktionen von Wu und dem Euklidischen Hut eingehen. Dieser Zusammenhang liefert die Idee der später konstruierten Funktionen minimalen Grades. Es wird auf die Reskalierung verzichtet, so daß beide Funktionenklassen ihren Träger im Intervall $[0, 2]$ haben. Außerdem muß man sich auf ungerade Dimensionszahlen beschränken, da diese für die Funktionen von Wu natürlich sind. Beide Funktionsarten werden somit innerhalb ihres Trägers durch ein univariates Polynom dargestellt. Da es uns auf die eigentliche Funktion ankommt, bezeichnen wir wieder mit \doteq Gleichheit bis auf einen konstanten Faktor.

Satz 4.17 *Bezeichnet man mit $\phi_{\ell,k} = D^k\phi_{\ell}$ die Funktionen von Wu, sowie mit $X^{(d)}$ den Euklidischen Hut, so gilt für $\ell \geq k$*

$$\phi_{\ell,k} \doteq I^{\ell-k} X^{(2\ell+1)}.$$

Beweis: Der Beweis kann einfach durch Berechnung der Fouriertransformierten beider Seiten geführt werden. Wir benutzen hier aber Satz 4.8 und Satz 4.13, um

$$\begin{aligned}
\phi_{\ell,k} &= D^k(f_\ell *_1 f_\ell) \\
&= (D^k f_\ell) *_2{}_{2k+1} (D^k f_\ell) \\
&= (I^{\ell-k} D^\ell f_\ell) *_2{}_{2k+1} (I^{\ell-k} D^\ell f_\ell) \\
&= I^{\ell-k} ((D^\ell f_\ell) *_2{}_{2\ell+1} (D^\ell f_\ell)) \\
&\doteq I^{\ell-k} X^{(2\ell+1)}
\end{aligned}$$

zu erhalten. Dabei haben wir noch berücksichtigt, daß für $f_\ell(r) = (1 - r^2)_+^\ell$ gilt $D^\ell f_\ell(r) = 2^\ell \ell! \chi(r)$. □

5 Polynomiale Funktionen minimalen Grades

Wir betrachten jetzt Funktionen der Form

$$\phi(r) = \begin{cases} p(r) & 0 \leq r \leq 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases} \quad (5.1)$$

mit einem univariaten Polynom p . Dazu gehen wir zuerst auf allgemeine Eigenschaften ein, bevor wir bestimmte Funktionen konstruieren, von denen wir dann die Optimalität im Sinne minimalen Grades in Abhängigkeit von der Raumdimension und der Glätte beweisen. Wir erinnern noch einmal an die abgeschnittenen Potenzfunktionen

$$\psi_\nu(r) = (1 - r)_+^\nu,$$

die für den Spezialfall $\nu = \ell \in \mathbb{N}$ eine Funktion der Gestalt (5.1) darstellen.

5.1 Allgemeines

Wir hatten bereits vorher angemerkt, daß aufgrund der Forderung $\phi(-t) = \phi(t)$ und der Tatsache, daß ein Polynom unendlich oft differenzierbar ist, die Glätte bei Null immer von gerader Ordnung ist, wofür wir $\phi \in C^{2k}(0)$ schreiben. Entsprechend bezeichnen wir mit $\phi \in C^\ell(1)$ die Glätte von ϕ um Eins, der wir uns nun zuwenden.

Lemma 5.1 *Ist ϕ eine auf \mathbb{R}^d positiv definite Funktion der Form (5.1), so gilt $\phi \in C^{\lfloor d/2 \rfloor}(1)$.*

Beweis: Wir führen den Beweis analog zu [11]. Da $\phi \in L_1(\mathbb{R}^d)$ liegt und positiv definit ist, gilt einerseits

$$\phi(r) = r^{-d/2} \int_0^\infty \mathcal{F}_d \phi(t) t^{d/2} J_{\frac{d-2}{2}}(rt) dt$$

und andererseits

$$\int_0^\infty |\mathcal{F}_d \phi(r)| r^{d-1} dr < \infty.$$

Berücksichtigt man, daß für die Ableitungen der Besselfunktionen für $r \rightarrow \infty$ nach [57] Seite 45 und Seite 199 $J_\nu^{(k)}(r) = \mathcal{O}(r^{-1/2})$ gilt, so erhält man die Existenz von $\lfloor (d-1)/2 \rfloor$ Ableitungen und damit die Behauptung für ungerades d . Für gerades $d = 2\ell$ muß man noch zeigen, daß die ℓ -te Ableitung von p in Eins verschwindet. Sei dazu $p(r) = \sum_{j=0}^s a_j r^j$. Dann lautet die d -variate Fouriertransformation von ϕ

$$\mathcal{F}_d \phi(r) = r^{-d} \int_0^r p(t/r) t^{d/2} J_{\frac{d-2}{2}}(t) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r^{s+d}} \sum_{j=0}^s a_j r^{s-j} \int_0^r t^{j+\ell} J_{\ell-1}(t) dt \\
&=: \frac{1}{r^{s+d}} I(r).
\end{aligned}$$

Da ϕ positiv definit ist, ist $I \geq 0, \neq 0$. Wir werden jetzt durch partielle Integration den Index der Besselfunktion verringern. Es handelt sich dabei nur indirekt um eine Anwendung des Operators D . Man erhält schließlich

$$\begin{aligned}
I(r) &= r^s \left[- \sum_{j=1}^s a_j (j+2\ell-2)(j+2\ell-4) \cdots j J_{-2}(r) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^s a_j (j+2\ell-2)(j+2\ell-4) \cdots j(j-2) r^{-j} \int_0^r t^{j-1} J_{-2}(t) dt \right].
\end{aligned}$$

Das asymptotische Verhalten für $r \rightarrow \infty$ des ersten Summanden ist durch

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \mathcal{O}(x^{-3/2})$$

bestimmt (vgl. [57] Seite 199). Aus

$$\begin{aligned}
\int_0^r \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{\sin r}{\sqrt{r}} + \mathcal{O}(r^{-1}), \\
\int_0^r \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{\cos r}{\sqrt{r}} + \mathcal{O}(r^{-1})
\end{aligned}$$

(vgl. [23] Seite 932, Formel 8.255) folgt, daß der zweite Summand für $r \rightarrow \infty$ wie $1/r$ fällt und daher nicht in der Lage ist, die Vorzeichenwechsel des ersten Summanden für große r auszugleichen. Daher muß bereits die erste Summe Null sein. Andererseits gilt mit Konstanten c_j , $1 \leq j \leq \ell$, $c_\ell = 1$

$$0 = \sum_{j=1}^s a_j (j+2\ell-2)(j+2\ell-4) \cdots j = (-1)^\ell D^\ell \{r^{2\ell-2} p(r)\}(1) = \sum_{j=0}^{\ell} c_j p^{(j)}(1).$$

Da bereits $p(1) = \dots = p^{(\ell-1)}(1) = 0$ war, muß schließlich auch $p^{(\ell)}(1) = 0$ sein. \square

Der Beweis des Satzes liefert zusätzlich, daß für jede über \mathbb{R}^d positiv definite, radiale und integrierbare Funktion mindestens $\lfloor (d-1)/2 \rfloor$ stetige Ableitungen auf $(0, \infty)$ existieren.

Es ist klar, daß nur die Glätte in der Nähe der Punkte Null und Eins einer intensiveren Untersuchung bedarf. Für gegebenes ϕ der Form (5.1) beeinflussen die Operatoren I und D offenbar die Glätte um Null in zwei Schritten und die Glätte um Eins in Schritten der Schrittweite Eins.

Bemerkung 5.2 Ist $\phi \in C^{2k}(0) \cap C^\ell(1) \cap \mathbf{PD}_d$ von der Form (5.1), so ist

- $D\phi \in C^{2k-2}(0) \cap C^{\ell-1}(1) \cap \mathbf{PD}_{d+2}$,
- $I\phi \in C^{2k+2}(0) \cap C^{\ell+1}(1) \cap \mathbf{PD}_{d-2}$. □

Man beachte dabei, daß die Anzahl der Anwendungen von D nur von der Glätte der Funktion ϕ abhängt, dagegen ist die Häufigkeit der Anwendungen von I nur durch die Raumdimension d beschränkt.

Dies deutet bereits darauf hin, daß die Glätte um Null und um Eins nicht völlig unabhängig voneinander gewählt werden kann, was nun genauer untersucht werden soll. Bei den Funktionen von Wu gilt z.B., daß sie $2k$ stetige Ableitungen um Null und $2k + \lfloor d/2 \rfloor$ stetige Ableitungen um Eins besitzen. Daß dieser „Vorsprung“ kein Zufall ist, besagt der nächste Satz.

Satz 5.3 Sei $d \in \mathbb{N}$ und $\phi \in \mathbf{PD}_d$ eine Funktion der Form (5.1). Dann hat die Glätte der Funktion um Null und Eins notwendig die Form

$$\phi \in C^{2k}(0) \cap C^{2k+\lfloor d/2 \rfloor+\ell}(1)$$

mit $\ell, k \in \mathbb{N}_0$.

Beweis: Für $k = 0$ ist dies gerade Lemma 5.1. Wir beginnen mit einer Funktion

$$\phi \in C^{2k}(0) \cap C^m(1) \cap \mathbf{PD}_d$$

und nehmen zunächst $d \geq 2$ an. Dann ist $m \geq \lfloor d/2 \rfloor$. Ist sogar $m \geq 2k$, so ist $\psi := D^k \phi \in C^0(0) \cap C^{m-k}(1) \cap \mathbf{PD}_{d+2k}$ und damit nach Lemma 5.1 auch mindestens $\psi \in C^{\lfloor d/2 \rfloor+k}(1)$, was aber $m - k \geq \lfloor d/2 \rfloor + k$ bzw. $m \geq \lfloor d/2 \rfloor + 2k$ bedeutet. Es ist also im folgenden nur noch der Fall $m < 2k$ auszuschließen. Dazu unterscheiden wir, ob m gerade oder ungerade ist.

Ist $m = 2n$, $p = k - n$, so ist die Ausgangssituation

$$\phi \in C^{2p+2n}(0) \cap C^{2n}(1) \cap \mathbf{PD}_d.$$

Ist nun $n \geq p$, so ist $\psi := D^{n+p} \phi \in C^0(0) \cap C^{n-p}(1) \cap \mathbf{PD}_{d+2n+2p}$ und damit folgt wie oben $n - p \geq \lfloor d/2 \rfloor + n + p$ bzw. $0 \geq \lfloor d/2 \rfloor + 2p$ und schließlich $d = 1$, $p = 0$, was im Widerspruch zu $d \geq 2$ steht.

Ist andererseits $n < p$, so ist $\psi := D^{2n} \phi \in C^{2(p-n)}(0) \cap C^0(1) \cap \mathbf{PD}_{d+4n}$, und man erhält $0 \geq \lfloor d/2 \rfloor + 2n$, was wiederum $d = 1$ und $n = 0$ bedeutet und $d \geq 2$ widerspricht.

Ist $m = 2n + 1$ ungerade, $p = k - n$, so ist diesmal

$$\phi \in C^{2p+2n}(0) \cap C^{2n+1}(1) \cap \mathbf{PD}_d,$$

und man hat wieder zu unterscheiden, ob p oder n größer ist. Der Fall $n \geq p$ verläuft analog zu eben. Für $n < p$ setzt man diesmal $\psi := D^{2n+1} \phi \in C^{2(p-n-1)}(0) \cap C^0(1) \cap$

\mathbf{PD}_{d+4n+2} und erhält die Forderung $0 \geq \lfloor d/2 \rfloor + 2n + 1$, die diesmal nicht erfüllt werden kann. Also ist auch ein ungerades $m < 2k$ nicht möglich.

Der Fall $d = 1$ ist ein Spezialfall des nachfolgenden Satzes, dessen Beweis man in [13] findet. \square

Satz 5.4 *Ist $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ eine positiv definite Funktion, die zur Klasse C^{2k} um Null gehört, so ist Φ überall C^{2k} .* \square

Da wir insbesondere an Funktionen kleinsten Grades interessiert sind, geben wir hier ein erstes Resultat in diese Richtung.

Lemma 5.5 *Sei $\phi \in \mathbf{PD}_d$ von der Form (5.1) und normiert auf $\phi(0) = 1$. Ferner besitze ϕ minimalen Grad. Dann ist der Grad von ϕ gerade $\partial\phi = \lfloor d/2 \rfloor + 1$ und ϕ ist eindeutig gegeben durch*

$$\phi(r) = \psi_{\lfloor d/2 \rfloor + 1}(r) = (1 - r)_+^{\lfloor d/2 \rfloor + 1}.$$

Beweis: Nach Lemma 5.1 muß ϕ um Eins $\lfloor d/2 \rfloor$ stetige Ableitungen besitzen, so daß ϕ notwendig die Form

$$\phi(r) = (1 - r)_+^{\lfloor d/2 \rfloor + 1} q(r)$$

mit einem Polynom q vom Grad $\partial q \geq 0$ haben muß. Da nach Satz 4.15 bereits $(1 - r)_+^{\lfloor d/2 \rfloor + 1}$ positiv definit ist und ϕ normiert sein soll, ist $q \equiv 1$ zu wählen, um den minimalen Grad zu erreichen (vgl. auch [11]). \square

Nach den vorhergehenden Ausführungen besteht also die natürliche Verallgemeinerung des letzten Lemmas darin, die folgende Frage zu beantworten.

- Wie sehen bei gegebener Raumdimension d und gegebener Glätte $2k$ die Funktionen ϕ der Form (5.1) mit $\phi \in C^{2k} \cap \mathbf{PD}_d$ und mit minimalem Grad aus Γ

Diese Frage wird in den folgenden Abschnitten dieses Kapitels vollständig beantwortet werden.

5.2 Konstruktion

Wir wollen im folgenden die Funktionen

$$\psi_{\nu,k}(r) := I^k \psi_{\nu}(r) = I^k (1 - \cdot)_+^{\nu}(r)$$

mit $k \in \mathbb{N}_0$, $\nu \in \mathbb{R}_{>0}$ berechnen. Dazu definieren wir zunächst einige Klammerprodukte, wie sie zum Teil auch in der Theorie der hypergeometrischen Reihen üblich sind.

Definition 5.6 *Seien $\ell \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Dann definiert man*

- $[\alpha]_{-1} := 1/(\alpha + 1)$, $[\alpha]_0 := 1$,
- $[\alpha]_\ell := \alpha(\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - \ell + 1)$.

Für $\ell \in \mathbb{N}$ und $\nu \in \mathbb{R}$ setzen wir zusätzlich

- $(\nu)_0 := 1$,
- $(\nu)_\ell := \nu(\nu + 1) \cdot \dots \cdot (\nu + \ell - 1)$.

Diese Klammerprodukte besitzen untereinander und zur Gammafunktion einfache Zusammenhänge, von denen wir einige aufführen.

Bemerkung 5.7 Es seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\ell, k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt, sofern die Ausdrücke definiert sind,

$$(1) \quad (\alpha)_\ell = \Gamma(\alpha + \ell)/\Gamma(\alpha),$$

$$(2) \quad [\alpha]_\ell = (\alpha - \ell + 1)_\ell,$$

$$(3) \quad (\alpha)_\ell = [\alpha + \ell - 1]_\ell,$$

$$(4) \quad [\alpha]_\ell [\alpha - \ell + 1]_k = (\alpha - \ell + 1) [\alpha]_{\ell+k-1},$$

$$(5) \quad (\alpha)_\ell (\alpha + \ell)_k = (\alpha)_{\ell+k},$$

$$(6) \quad (\alpha)_{2\ell} = 4^\ell (\alpha/2)_\ell ((\alpha + 1)/2)_\ell. \quad \square$$

Die Beziehungen sind einfach nachzurechnen, genauso ist die Liste beliebig fortsetzbar. Unter Benutzung dieser Eigenschaften läßt sich das nächste Lemma mit vollständiger Induktion beweisen. Es beinhaltet eine explizite Formel für unvollständige Betafunktionen mit einem natürlichen Argument.

Lemma 5.8 Für $k \in \mathbb{N}$ und $\nu \in \mathbb{R}_{>0}$ definieren wir

$$M_{k,\nu}(r) := \int_r^1 s^k \psi_\nu(s) ds.$$

Dann erhält man die Identität

$$M_{k,\nu}(r) = \sum_{\ell=0}^k \frac{[k]_\ell}{(\nu + 1)_{\ell+1}} r^{k-\ell} \psi_{\nu+\ell+1}(r).$$

□

Es läßt sich jetzt bereits die erste Darstellungsform für die gewünschten Funktionen $\psi_{\nu,k}$ angeben. Dabei erhält man für die auftretenden Koeffizienten rekursive Formeln, die sich in einfacher Weise auswerten lassen.

Satz 5.9 *Es gilt die Darstellung*

$$\psi_{\nu,k}(r) = \sum_{n=0}^k \beta_{n,k}^{(\nu)} r^n \psi_{\nu+2k-n}(r). \quad (5.2)$$

Dabei erfüllen die Koeffizienten die Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} \beta_{0,0}^{(\nu)} &= 1 \\ \beta_{j,k+1}^{(\nu)} &= \sum_{n=j-1}^k \beta_{n,k}^{(\nu)} \frac{[n+1]_{n-j+1}}{(\nu+2k-n+1)_{n-j+2}}, \quad 0 \leq j \leq k+1, \end{aligned}$$

sofern der Term für $n = -1$ bei $j = 0$ ignoriert wird.

Beweis: Der Beweis wird durch Induktion nach k geführt. Für $k = 0$ ist dabei nichts zu zeigen, so daß wir gleich zum Induktionsschritt übergehen. Es gilt

$$\begin{aligned} I^{k+1}\psi_{\nu}(r) &= \sum_{n=0}^k \beta_{n,k}^{(\nu)} M_{n+1,\nu+2k-n}(r) \\ &= \sum_{n=0}^k \sum_{\ell=0}^{n+1} \beta_{n,k}^{(\nu)} \frac{[n+1]_{\ell}}{(\nu+2k-n+1)_{\ell+1}} r^{n+1-\ell} \psi_{\nu+2k-n+\ell+1}(r) \\ &= \sum_{n=0}^k \sum_{\ell=0}^n \beta_{n,k}^{(\nu)} \frac{[n+1]_{n-\ell}}{(\nu+2k-n+1)_{n-\ell+1}} r^{\ell+1} \psi_{\nu+2k-\ell+1}(r) \\ &\quad + \sum_{n=0}^k \beta_{n,k}^{(\nu)} \frac{[n+1]_{n+1}}{(\nu+2k-n+1)_{n+2}} \psi_{\nu+2k+2}(r) \\ &= \sum_{\ell=1}^{k+1} \sum_{n=\ell-1}^k \beta_{n,k}^{(\nu)} \frac{[n+1]_{n-\ell+1}}{(\nu+2k-n+1)_{n-\ell+2}} r^{\ell} \psi_{\nu+2(k+1)-\ell}(r) \\ &\quad + \beta_{0,k+1}^{(\nu)} \psi_{\nu+2(k+1)}(r), \end{aligned}$$

wobei am Anfang das vorhergehende Lemma benutzt wurde. \square

Setzt man $\nu = \ell \in \mathbb{N}$, so folgt aus diesem Satz insbesondere, daß der Operator I die Klasse der Funktionen der Form (5.1) invariant läßt. Für diesen Fall wollen wir noch eine Darstellung in der Monombasis angeben. Diese läßt sich zwar auch aus der eben angegebenen Darstellung gewinnen, doch direkt vorzugehen ist wieder einfacher.

Satz 5.10 Für $\ell, k \in \mathbb{N}_0$ gilt innerhalb des Trägerbereiches $[0, 1]$

$$\psi_{\ell,k}(r) = \sum_{j=0}^{\ell+2k} d_{j,k}^{(\ell)} r^j.$$

Dabei genügen die Koeffizienten den Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} d_{j,0}^{(\ell)} &= (-1)^j \binom{\ell}{j} & 0 \leq j \leq k \\ d_{0,k+1}^{(\ell)} &= \sum_{j=0}^{\ell+2k} \frac{d_{j,k}^{(\ell)}}{j+2}, & d_{1,k+1}^{(\ell)} = 0 & k \geq 0 \\ d_{j,k+1}^{(\ell)} &= \frac{d_{j-2,k}^{(\ell)}}{j} & k \geq 0, \quad 2 \leq j \leq \ell + 2k + 2. \end{aligned}$$

Ferner verschwinden genau die ersten k ungeraden Koeffizienten $d_{j,k}^{(\ell)}$.

Beweis: Die Darstellungsform und die Rekursionsformeln erhält man durch einfache Induktion. Außerdem entnimmt man den Rekursionsformeln die letzte Aussage, wenn man zusätzlich weiß, daß $d_{0,k}^{(\ell)} \neq 0$ ist für jedes k . Dies gilt sicherlich für $k = 0$ und folgt für größeres k induktiv aus

$$d_{0,k+1}^{(\ell)} = \psi_{\ell,k+1}(0) = \int_0^1 t \psi_{\ell,k}(t) dt > 0.$$

□

5.3 Hauptresultate

Wir zeigen jetzt, daß die gerade konstruierten Funktionen genau die Funktionen minimalen Grades sind. Wir setzen also von hier an immer $\nu = \ell \in \mathbb{N}_0$.

Lemma 5.11 Die Funktion $\psi_{\ell,k}$ ist von der Form (5.1), d.h. sie besitzt den Träger $[0, 1]$ und besteht dort aus einem Polynom. Sie hat den Grad $\partial\psi_{\ell,k} = \ell + 2k$, ist um Null $2k$ -mal und um Eins $k + \ell - 1$ -mal stetig differenzierbar.

Beweis: Die ersten Aussagen über die Form und den Grad entnimmt man ebenso wie die Aussage über die Glätte bei Null unmittelbar Satz 5.10. Den Grad der Glätte bei Eins erkennt man an der Darstellung, die in Satz 5.9 gegeben ist. □

Es werden nun die Aussagen der Sätze 4.8 und 4.15 benutzt, um durch geschickte Wahl des ℓ in $\psi_{\ell,k}$ positiv definite Funktionen zu erhalten.

Satz 5.12 Für die Raumdimension $d \in \mathbb{N}$ und für $k \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $\psi_{\ell,k}$ mit $\ell = \lfloor d/2 \rfloor + k + 1$ in $\mathbf{PD}_d \cap C^{2k}$ und vom Grad $\partial\psi_{\ell,k} = \lfloor d/2 \rfloor + 3k + 1$.

Beweis: Der Grad der Funktion ist durch die Wahl von ℓ und Lemma 5.11 gegeben. Wegen $\ell = \lfloor d/2 \rfloor + k + 1 = \lfloor (d + 2k)/2 \rfloor + 1$ ist $\psi_\ell \in \mathbf{PD}_{d+2k} \cap C^0(0) \cap C^{\lfloor d/2 \rfloor + k}(1)$. Berücksichtigt man das Wechselspiel zwischen Fouriertransformation und dem Operator I sowie Bemerkung 5.2 so erhält man $\psi_{\ell,k} \in \mathbf{PD}_d \cap C^{2k}(0) \cap C^{\lfloor d/2 \rfloor + 2k}(1)$. \square

Die folgende Tabelle enthält einige der neuen Funktionen und in Bild 1 ist die Funktion $\psi_{3,1}(r) \doteq (1-r)_+^4(4r+1) \in \mathbf{PD}_3 \cap C^2$ zu sehen.

$d = 1$	$\psi_{1,0}(r) = (1-r)_+$	C^0
	$\psi_{2,1}(r) \doteq (1-r)_+^3(3r+1)$	C^2
	$\psi_{3,2}(r) \doteq (1-r)_+^5(8r^2+5r+1)$	C^4
$d = 3$	$\psi_{2,0}(r) = (1-r)_+^2$	C^0
	$\psi_{3,1}(r) \doteq (1-r)_+^4(4r+1)$	C^2
	$\psi_{4,2}(r) \doteq (1-r)_+^6(35r^2+18r+3)$	C^4
	$\psi_{5,3}(r) \doteq (1-r)_+^8(32r^3+25r^2+8r+1)$	C^6
$d = 5$	$\psi_{3,0}(r) = (1-r)_+^3$	C^0
	$\psi_{4,1}(r) \doteq (1-r)_+^5(5r+1)$	C^2
	$\psi_{5,2}(r) \doteq (1-r)_+^7(16r^2+7r+1)$	C^4

Tabelle 1: Liste von Funktionen

Die Regelmäßigkeit der Gestalt der C^2 -Funktionen setzt sich auch in höhere Dimensionen fort. Den Rekursionsformeln des letzten Abschnittes kann man

$$\psi_{\lfloor d/2 \rfloor + 2, 1}(r) \doteq (1-r)_+^{\lfloor d/2 \rfloor + 3} \{(\lfloor d/2 \rfloor + 3)r + 1\} \in \mathbf{PD}_d \cap C^2$$

entnehmen. Auch das Auftreten des absoluten Termes $\neq 1$ bei der C^4 Funktion im \mathbb{R}^3 ist kein Zufall. Dieses Phänomen tritt immer genau dann auf, wenn $\lfloor d/2 \rfloor \equiv 1 \pmod{3}$ ist.

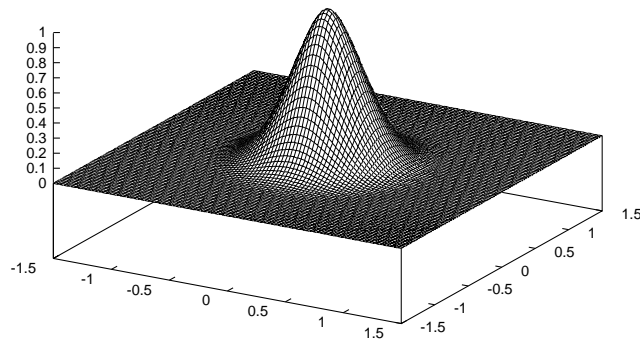


Abbildung 1: $\psi_{3,1}$

Die hier konstruierten Funktionen haben mit $\partial\psi_{\ell,k} = \lfloor d/2 \rfloor + 3k + 1$ einen geringeren Grad als die entsprechenden Funktionen von Wu mit $\partial\phi_{k+n,n} = 2\lfloor d/2 \rfloor + 4k + 1$ jeweils in Abhängigkeit von der Raumdimension d mit $\lfloor d/2 \rfloor = n$ und der Glätte $2k$. Ferner hat die C^2 -Funktion im univariaten Fall einen Grad, der nur um Eins höher ist als der Grad des klassischen B-Splines, welcher allerdings von vorgegebenen Knoten abhängt.

Satz 5.13 *Es gibt keine Funktion $\phi \in \mathbf{PD}_d \cap C^{2k}$ der Form (5.1), deren Grad kleiner ist als $\lfloor d/2 \rfloor + 3k + 1$.*

Beweis: Angenommen, es existiert eine derartige Funktion ϕ mit $\partial\phi < \lfloor d/2 \rfloor + 3k + 1$. Dann läßt sich aufgrund der geforderten Glätte von ϕ der D Operator nach Lemma 4.7 mindestens $2k$ -mal anwenden, und die resultierende Funktion $\psi := D^k\phi$ ist wieder von der Form (5.1). Für ψ gilt dann nach Korollar 4.9 und Bemerkung 5.7 auch $\psi \in \mathbf{PD}_{d+2k} \cap C^0$. Ferner hat ψ den Grad $\partial\psi < \lfloor (d+2k)/2 \rfloor + 1$, da jede Anwendung des D Operators den Grad des zugehörigen Polynoms jeweils um zwei vermindert. Dies steht aber im Widerspruch zu Lemma 5.5 \square

Da wir nun wissen, daß die von uns konstruierten Funktionen von minimalem Grad in Abhängigkeit von der Raumdimension und der Glätte sind, bleibt noch die Frage, ob sich die Eindeutigkeitsaussage von Lemma 5.5 ebenfalls übertragen läßt.

Satz 5.14 *Die Funktionen ϕ der Form (5.1) mit $\phi \in \mathbf{PD}_d \cap C^{2k}$ und $\partial\phi = \lfloor d/2 \rfloor + 3k + 1$ sind bis auf einen konstanten Faktor eindeutig.*

Beweis: Der Beweis folgt dem Schema des letzten Beweises. Angenommen, es existieren zwei Funktionen ϕ, ψ mit den angegebenen Eigenschaften, die sich nicht nur um einen konstanten Faktor unterscheiden. Dann unterscheiden sich auch die Funktionen $\tilde{\phi} := D^k\phi$ und $\tilde{\psi} := D^k\psi$ um mehr als einen konstanten Faktor, denn es gilt auch $\phi = I^k\tilde{\phi}$ und $\psi = I^k\tilde{\psi}$. Nun sind aber $\tilde{\phi}$ und $\tilde{\psi}$ zwei Funktionen in $\mathbf{PD}_{d+2k} \cap C^0$ mit minimalem Grad $\lfloor (d+2k)/2 \rfloor + 1$ und können sich daher nach Lemma 5.5 nur um einen konstanten Faktor unterscheiden, was im Widerspruch zu dem oben Gesagten steht. \square

Wir haben also die Frage des letzten Kapitels zu diesem Zeitpunkt vollständig beantwortet. Dabei haben die hier konstruierten Funktionen gegenüber den Funktionen von Wu nicht nur den Vorteil eines minimalen Grades. Sie besitzen darüber hinaus auch effizient auswertbare Rekursionsformeln. Ferner traten sowohl bei den Funktionen von Wu als auch beim Euklidischen Hut Nullstellen bei den Fouriertransformierten auf, was nach Satz 4.17 nicht verwunderlich ist. Für die optimalen Funktionen $\psi_{\ell,k}$ gilt dagegen z.B. nach [21] für $\ell + k > 1$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_d\psi_{\ell,k}(r) &= \mathcal{F}_d I^k\psi_{\ell}(r) = \mathcal{F}_{d+2k}\psi_{\ell}(r) \\ &= r^{-d-2k-\ell} \int_0^r (r-t)^\ell t^{\frac{d}{2}+k} J_{\frac{d}{2}+k-1}(t) dt > 0 \end{aligned}$$

Diesen Vorteil werden wir bei der Konditionsabschätzung im nächsten Kapitel ausnutzen können.

5.4 Thin-plate-spline-artige Funktionen

Die gerade konstruierten optimalen Funktionen sind nicht nur als radiale Basisfunktionen von Nutzen, sie können auch als Hilfsfunktionen zur Konstruktion neuer positiv definiter Funktionen mit kompaktem Träger dienen. So läßt sich die Faltung nach Satz 4.13 zu

$$\psi_{\ell,k} *_{2n+1} \psi_{\ell,k} = D^n(\psi_{\ell,k+n} *_{1} \psi_{\ell,k+n})$$

berechnen, so daß sich z.B. für die Faltung der C^0 -Funktion im \mathbb{R}^3 die Funktion

$$\psi_{2,0} *_{3} \psi_{2,0}(r) \doteq \begin{cases} 18r^7 + 96r^6 - 252r^5 + 168r^4 - 28r^2 + 3 & 0 \leq r \leq 1/2 \\ 2(1-r)^6(9r^2 + 6r - 1)/r & 1/2 \leq r \leq 1 \\ 0 & r \geq 1 \end{cases}$$

ergibt. Auf ähnliche Weise läßt sich die Laplace-Methode anwenden und liefert z.B. für die C^2 -Funktion im \mathbb{R}^3 die Funktion

$$-\Delta\psi_{3,1}(r) \doteq -(4r^2 + r - 2)(r - 1)_+^2.$$

Wir wollen hier mit der Integral-Methode Funktionen der Form

$$\phi(r) = \begin{cases} p(r) + cr^m \log(r) & 0 \leq r \leq 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases} \quad (5.3)$$

mit einem univariaten Polynom p konstruieren. Derartige Funktionen wurden in [10] auf anderem Wege hergeleitet. Wir nennen diese Funktionen von Thin-plate-spline-Art, da sie die gewöhnlichen Thin-plate-splines $r^{2k} \log(r)$ durch Hinzunahme eines univariaten Polynoms folgendermaßen verallgemeinern:

- Sie sind positiv definit, nicht nur bedingt positiv definit.
- Sie haben kompakten Träger.
- Die Potenz vor dem Logarithmus muß nicht gerade sein.

Hat man einen nichtnegativen Kern $K(t)$ und eine positiv definite Funktion $\psi(t)$, die beide einen Träger in $[0, 1]$ haben, so ist auch die Funktion ϕ , die sich innerhalb ihres Trägers $[0, 1]$ durch

$$\phi(r) = \int_r^1 \psi(r/t)K(t)dt$$

darstellen läßt, positiv definit. Ihre Glätte wird bestimmt durch die Glätte von ψ und das Verhalten von $K(t)$ in der Nähe von Null. Wir setzen nun für ψ eine der Funktionen des letzten Abschnittes und für $K(t) = t^m$, $0 \leq t \leq 1$, $K(t) = 0$ sonst. Tabelle 2 enthält eine Auswahl der so konstruierten Funktion. Dabei sind diese Funktionen nur innerhalb ihres Trägers und bis auf einen konstanten Faktor angegeben.

$\psi_{\ell,k}$	m	erzeugte Funktion ϕ	Klasse
$\psi_{2,1}$	0	$(1-r)^4$	$\mathbf{PD}_1 \cap C^0$
	1	$(1+12r^2-16r^3+3r^4)+12r^2 \log(r)$	C^1
	2	$(1-18r^2+8r^3+9r^4)-24r^3 \log(r)$	C^2
$\psi_{3,1}$	0	$(1-r)^5$	$\mathbf{PD}_3 \cap C^0$
	1	$(3+80r^2-120r^3+45r^4-8r^5)+60r^2 \log(r)$	C^1
	2	$(1-30r^2-10r^3+45r^4-6r^5)-60r^3 \log(r)$	C^2
	3	$(1-20r^2+80r^3-45r^4-16r^5)+60r^4 \log(r)$	C^2
$\psi_{4,1}$	0	$(1-r)^5$	$\mathbf{PD}_5 \cap C^0$
	1	$(2+95r^2-160r^3+90r^4-32r^5+5r^6)+60r^2 \log(r)$	C^1
	2	$(1-45r^2-60r^3+135r^4-36r^5+5r^6)-120r^3 \log(r)$	C^2

Tabelle 2: Thin-plate-spline-artige Funktionen

Satz 5.15 Sei

$$\psi_{\ell,k}(r) = \sum_{j=0}^{\ell+2k} d_j r^j \in \mathbf{PD}_d \cap C^{2k}(0) \cap C^{k+\ell-1}(1)$$

die Monom-Darstellung aus Satz 5.10 mit $\ell = \lfloor d/2 \rfloor + k + 1$, und sei

$$\phi(r) = \int_r^1 \psi_{\ell,k}(r/t) t^m dt, \quad 0 \leq r \leq 1,$$

$\phi(r) = 0, r \geq 1$, mit $0 \leq m \leq \ell + 2k - 1 = \lfloor d/2 \rfloor + 3k$. Dann ist $\phi \in \mathbf{PD}_d$ und besitzt innerhalb seines Trägers die Darstellung

$$\phi(r) = \begin{cases} p(r) + cr^{m+1} \log(r) & m \geq 2k \text{ oder } m < 2k \text{ und } m \text{ ungerade} \\ p(r) & m < 2k \text{ und } m \text{ gerade} \end{cases}$$

mit dem Polynom $p(r) = \sum_{j=0}^{\ell+2k} c_j r^j$ und den Koeffizienten $c_j = d_j / (m - j + 1), j \neq m + 1, c_{m+1} = -(c_1 + \dots + c_m + c_{m+2} + \dots + c_{\ell+2k})$ und $c = -d_{m+1}$. Außerdem besitzt ϕ das Glätteverhalten

$$\phi \in C^{\ell+k}(1) \cap \begin{cases} C^{2k}(0) & m \geq 2k \\ C^{2m}(0) & m < 2k \text{ und } m \text{ gerade} \\ C^m(0) & m < 2k \text{ und } m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Wir beschränken uns auf $m \leq \ell + 2k - 1 = \lfloor d/2 \rfloor + 3k$, da für größeres m wieder ein Polynom im Trägerbereich herauskommt.

Beweis: Da ϕ nach Satz 4.2 positiv definit ist, kommen wir direkt zur Darstellung, die sich unmittelbar berechnen läßt:

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \sum_{j=0}^{\ell+2k} d_j r^j \int_r^1 t^{m-j} dt \\ &= \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq m+1}}^{\ell+2k} \frac{d_j}{m-j+1} r^j - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq m+1}}^{\ell+2k} \frac{d_j}{m-j+1} r^{m+1} - d_{m+1} r^{m+1} \log(r). \end{aligned}$$

Aus $0 \leq m \leq \ell + 2k - 1$ folgt nun mit Satz 5.10, daß d_{m+1} genau dann Null ist, wenn m gerade und $m \leq 2k - 2$ ist. In diesem Fall erhält man also wieder ein Polynom. Um die Glätte um Eins nachzuweisen, reicht es nicht aus, über die Vertauschbarkeit von Integration und Differentiation zu argumentieren, da die $\psi_{\ell,k}$ nur $\ell + k - 1$ stetige Ableitungen in Eins besitzen. Dies bedeutet aber gleichzeitig, daß sie innerhalb ihres Trägers die Taylorentwicklung

$$\psi_{\ell,k}(r) = \sum_{j=k+\ell}^{2k+\ell} \gamma_j (1-r)^j$$

mit den Koeffizienten $\gamma_j = (-1)^j (d^j / dr^j) \psi_{\ell,k}(1) / j!$ besitzen. Man erhält damit die Darstellung

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \sum_{j=k+\ell}^{2k+\ell} \gamma_j \int_r^1 (1-r/t)^j t^m dt \\ &= \sum_{j=k+\ell}^{2k+\ell} \gamma_j r^{m+1} \underbrace{\int_r^1 (1-s)^j s^{-(m+2)} ds}_{I_j(r):=} \end{aligned}$$

Da $I_j'(r) = -(1-r)^j r^{-(m+2)} \in C^{j-1}(1)$ gilt, hat man $(d/dr)^\nu I_j(1) = 0$ für $0 \leq \nu \leq \ell + k$ und $\ell + k \leq j \leq \ell + 2k$, was aber $(d/dr)^\nu \phi(1) = 0$ für $0 \leq \nu \leq \ell + k$ bedeutet.

Kommen wir schließlich zur Glätte um Null. Ist $m \geq 2k$, so ist $\phi(r) = p(r) + cr^{m+1} \log(r)$. Da $r^{m+1} \log(r)$ in $C^m(0) \subseteq C^{2k}(0)$ liegt und da ferner nach Konstruktion die ersten k ungeraden Koeffizienten von p verschwinden, besitzt ϕ also $2k$ stetige Ableitungen um Null. Es kann nicht mehr besitzen, da sonst auch p und schließlich $\psi_{\ell,k}$ ebenfalls mehr besitzen würden. Ist $m < 2k$ und ungerade, so kann man ähnlich argumentieren, um $\phi \in C^m(0)$ zu erhalten. Ist schließlich $m < 2k$ und gerade, so gilt $\phi = p$ und $c_{m+1} \neq 0$, denn $c_{m+1} = 0$ würde $\phi \in \mathbf{PD}_d \cap C^{2k}$ implizieren. Da ϕ sich aber nicht nur um eine Konstante von $\psi_{\ell,k}$ unterscheidet und denselben Grad hat, widerspricht dies Satz 5.14, also gilt nur $\phi \in C^{2m}(0)$. \square

6 Fehler- und Konditionsabschätzungen

6.1 Asymptotisches Verhalten der Fouriertransformierten

In diesem Abschnitt untersuchen wir das asymptotische Verhalten der Fouriertransformierten

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_d\psi_{\ell,k}(r) &= \mathcal{F}_d I^k \psi_{\ell}(r) = \mathcal{F}_{d+2k}\psi_{\ell}(r) \\ &= r^{-d-2k-\ell} \int_0^r (r-t)^{\ell} t^{\frac{d}{2}+k} J_{\frac{d}{2}+k-1}(t) dt,\end{aligned}$$

der optimalen Funktionen $\psi_{\ell,k}$. Sie unterscheiden sich von den Fouriertransformierten des Euklidischen Hutes und der Funktionen von Wu, die beide, wie bereits erwähnt, die Gestalt

$$\varphi(r) = r^{-2\nu} J_{\nu}^2(r)$$

haben, insbesondere darin, daß sie nullstellenfrei sind. Es soll hier nachgewiesen werden, daß $\mathcal{F}_d\psi_{\ell,k}(r)$ sich asymptotisch wie $r^{-d-2k-1}$ verhält. Genau werden wir zeigen, daß von d und k abhängige Konstanten $0 < c_1 \leq c_2$ und ein $r_0 > 0$ existieren, so daß einerseits für $\ell = \lfloor d/2 \rfloor + k + 1$ die obere Schranke

$$\mathcal{F}_d\psi_{\ell,k}(r) \leq c_2 r^{-d-2k-1} \quad r > 0$$

gilt und andererseits für alle optimalen Funktionen mit Ausnahme der C^0 -Funktionen in \mathbb{R} und \mathbb{R}^2 zusätzlich die untere Schranke

$$c_1 r^{-d-2k-1} \leq \mathcal{F}_d\psi_{\ell,k}(r) \quad r \geq r_0$$

gültig ist. Die beiden ausgenommenen Funktionen sind insofern unproblematisch, daß zum einen die C^0 -Funktion in \mathbb{R} gerade die bekannte Hutfunktion mit der Fouriertransformierten $\mathcal{F}_1\psi_1(r) = \sqrt{(2/\pi)}(1 - \cos(r))/r^2$ ist. Zum anderen ist die optimale C^0 -Funktion ψ_2 in \mathbb{R}^2 auch die optimale C^0 -Funktion im \mathbb{R}^3 , so daß man dann im \mathbb{R}^3 rechnen kann und dort gilt dann wieder die untere Abschätzung.

Wir müssen die Fälle gerader und ungerader Raumdimension getrennt behandeln, da eine naheliegende Abschätzung obiger Darstellung der Fouriertransformierten nicht zum Ziel führt. Die hier erzielten Ergebnisse werden dann sowohl für die Bestimmung von Schranken für die Norm der Inversen der Interpolationsmatrix als auch für die Bestimmung der Approximationsgüte benutzt.

6.1.1 Ungerade Raumdimension

Innerhalb dieses Unterabschnittes gelte grundsätzlich für die Raumdimension $d = 2n + 1$. Ferner sei $m := n + k \geq 1$, was nur die C^0 -Funktion im \mathbb{R}^1 ausschließt. Dann ist $\ell = \lfloor d/2 \rfloor + k + 1 = m + 1$. Die Fouriertransformierte von $\psi_{\ell,k}$ läßt sich schreiben als

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{2n+1}\psi_{\ell,k}(r) &= \mathcal{F}_{2m+1}\psi_{m+1}(r) \\
&= r^{-3m-2} \int_0^r (r-t)^{m+1} t^{m+1/2} J_{m-1/2}(t) dt. \tag{6.1}
\end{aligned}$$

Wir beginnen mit der unteren Abschätzung und einer Darstellung nach Gasper [21], die die rechte Seite in eine unendliche Reihe bestehend aus Quadraten von Besselfunktionen entwickelt.

Lemma 6.1 Für $m > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
&\int_0^r (r-t)^{m+1} t^{m+1/2} J_{m-1/2}(t) dt = \\
&\alpha_m r^{m+1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(m)_{2j}}{(3m+3)_{2j}} \frac{(2m+2)_j}{j!} \frac{2j+2m+1}{j+2m+1} J_{m+j+1/2}^2(r/2)
\end{aligned}$$

mit

$$\alpha_m = \frac{(m+1)!(2m+1)!\Gamma(m+3/2)}{(3m+2)!} 2^{3m+3/2}.$$

Beweis: Unter Benutzung von Formel (2.7) in [21] mit $\alpha = m + 1/2$ erhält man nach einmaliger partieller Integration

$$\begin{aligned}
&\int_0^r (r-t)^{m+1} t^{m+1/2} J_{m-1/2}(t) dt \\
&= (m+1) \int_0^r (r-t)^m t^{m+1/2} J_{m+1/2}(t) dt \\
&= (m+1) \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(2m+2)\Gamma(m+3/2)}{\Gamma(3m+3)} 2^{3m+3/2} r^{m+1} \cdot \\
&\quad \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{2m+2}{4}\right)_j \left(\frac{2m}{4}\right)_j}{\left(\frac{3m+6}{4}\right)_j \left(\frac{3m+8}{4}\right)_j} \frac{(2m+2)_j}{j!} \frac{2j+2m+1}{j+2m+1} J_{m+j+1/2}^2(r/2).
\end{aligned}$$

Berücksichtigt man nun Formel (6) aus Satz 5.7, so erhält man nach wenigen Schritten die behauptete Identität. \square

Da die auftretenden Koeffizienten vor den Besselfunktionen sämtlich positiv sind, erhält man sofort die Abschätzung

Korollar 6.2 Für $m > 0$ erhält man eine untere Schranke der Form

$$\mathcal{F}_{2m+1}\psi_{m+1}(r) \geq C(m)r^{-2m-1} [J_{m+1/2}^2(r/2) + J_{m+3/2}^2(r/2)]$$

mit einer positiven von m abhängigen Konstanten $C(m)$. \square

Wir werden von nun an die Konstanten aus verständlichen Gründen in der Regel nicht mehr explizit angeben. Man beachte, daß nach [57] Seite 479 die Nullstellen der Besselfunktionen nicht zusammenfallen, so daß man eine untere Schranke gefunden hat, die positiv für alle Argumente ist.

Die auf den ersten Blick rigorose Abschätzung der unendlichen Reihe durch die ersten beiden Terme wird sich später als unproblematisch in dem Sinne herausstellen, daß das asymptotische Verhalten der gesamten Reihe bereits durch diese beiden Terme gegeben ist.

Ziel ist es nun, eine Ungleichung der Form

$$J_{m+1/2}^2(r) + J_{m+3/2}^2(r) \geq C(m)\frac{1}{r}$$

für hinreichend großes r zu beweisen. Dabei nutzen wir aus, daß die Besselfunktionen, deren Ordnung $m + 1/2$ ist, sich als finite Summen trigonometrischer Funktionen mit Gewichten r^{-j} schreiben lassen (siehe [57] Seite 53).

Lemma 6.3 Die Koeffizienten $\alpha_{j,m}$ seien definiert durch

$$\alpha_{j,m} := \begin{cases} \frac{(-1)^{\lfloor j/2 \rfloor} (m+j)!}{j!(m-j)!2^j} & 0 \leq j \leq m \\ 0 & \text{sonst} . \end{cases}$$

Außerdem seien die Funktion $f_{j,m}$ gegeben durch

$$f_{j,m}(r) := \begin{cases} \sin(r - \pi m/2) & j \text{ gerade} \\ \cos(r - \pi m/2) & j \text{ ungerade} . \end{cases}$$

Dann gilt die Identität

$$J_{m+1/2}(r) = \left(\frac{2}{\pi r}\right)^{1/2} \sum_{j=0}^m \alpha_{j,m} f_{j,m}(r) r^{-j}. \quad (6.2)$$

\square

Die Definition der $\alpha_{j,m}$ für $j \notin \{0, \dots, m\}$ ist für den nächsten Satz sinnvoll und wurde deshalb schon vorweggenommen. Genauso dient bei der Funktion $f_{j,m}$ der Parameter j nur als „switch“, um die Darstellung zu vereinfachen. Mit Hilfe dieser Darstellungsform können wir eine asymptotische untere Schranke für die Summe der Quadrate der Besselfunktionen angeben.

Satz 6.4 Für $m \in \mathbb{N}_0$ und $r \geq r_m := 48(m+1)^{2m+5}$ gilt

$$J_{m+1/2}^2(r) + J_{m+3/2}^2(r) \geq \frac{1}{\pi r}.$$

Die Angabe von r_m ist sehr grob, so daß sie zur tatsächlichen Bestimmung von Konditionsschranken nicht herangezogen werden sollte. Tatsächlich zeigen numerische Verfahren, daß die Ungleichung schon wesentlich früher erreicht wird. Wir werden darauf teilweise noch später eingehen. Das asymptotische Verhalten ist nicht sonderlich überraschend, da die Besselfunktionen generell wie $1/\sqrt{r}$ abfallen. Entscheidend ist aber, daß es sich um eine für $r \geq r_m$ gleichmäßige untere Schranke handelt.

Beweis: Die Darstellung (6.2) erlaubt die Berechnung

$$\begin{aligned} J_{m+1/2}^2(r) &= \frac{2}{\pi r} \left(\sum_{j=0}^m \alpha_{j,m} f_{j,m}(r) r^{-j} \right)^2 \\ &= \frac{2}{\pi r} \left(\sum_{j=0}^{2m} \left[\sum_{k=0}^j \alpha_{k,m} f_{k,m}(r) \alpha_{j-k,m} f_{j-k,m}(r) \right] r^{-j} \right) \\ &=: \frac{2}{\pi r} \left(f_{0,m}^2(r) + \sum_{j=1}^{2m} \beta_{j,m}(r) r^{-j} \right), \end{aligned}$$

mit der man wiederum

$$\begin{aligned} J_{m+1/2}^2(r) + J_{m+3/2}^2(r) &= \frac{2}{\pi r} \left(f_{0,m}^2(r) + f_{0,m+1}^2(r) + \sum_{j=1}^{2m} (\beta_{j,m}(r) + \beta_{j,m+1}(r)) r^{-j} + \right. \\ &\quad \left. + \beta_{2m+1,m+1}(r) r^{-2m-1} + \beta_{2m+2,m+1}(r) r^{-2m-2} \right) \\ &=: \frac{2}{\pi r} \left(f_{0,m}^2(r) + f_{0,m+1}^2(r) + \sum_{j=1}^{2m+2} \gamma_{j,m}(r) r^{-j} \right) \end{aligned}$$

erhält. Da ferner

$$\begin{aligned} f_{0,m}^2(r) + f_{0,m+1}^2(r) &= \sin^2\left(r - \frac{\pi m}{2}\right) + \sin^2\left(r - \frac{\pi(m+1)}{2}\right) \\ &= \sin^2\left(r - \frac{\pi m}{2}\right) + \cos^2\left(r - \frac{\pi m}{2}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

gilt, haben wir die Darstellung

$$J_{m+1/2}^2(r) + J_{m+3/2}^2(r) = \frac{2}{\pi r} \left(1 + \sum_{j=1}^{2m+2} \gamma_{j,m}(r) r^{-j} \right), \quad (6.3)$$

was bereits die Form der unteren Schranke liefert. Es bleibt zu zeigen, daß für $r \geq r_m$ die Summe auf der rechten Seite betragsmäßig kleiner als $1/2$ wird. Dazu betrachten wir zuerst die Koeffizienten $\alpha_{j,m}$. Es gilt $|\alpha_{m-1,m}| = |\alpha_{m,m}|$ und

$$|\alpha_{j+1,m}| = |\alpha_{j,m}| \frac{(m+j+1)(m-j)}{2(j+1)},$$

so daß für $j \leq m-2$ die Ungleichungskette

$$|\alpha_{j+1,m}| \geq |\alpha_{j,m}| \frac{m+j+1}{j+1} \geq |\alpha_{j,m}|$$

folgt. Wir haben damit insgesamt $|\alpha_{j,m}| \leq |\alpha_{m,m}|$ für jedes j . Als nächstes schätzen wir $|\alpha_{m,m}| = (2m)!(m!2^m)^{-1}$ durch m^m nach oben ab. Dies ist für $m=1$ sicherlich richtig, und für $m+1$ muß wegen $|\alpha_{m+1,m+1}| = (2m+1)|\alpha_{m,m}|$ nur $(2m+1)m^m \leq (m+1)^{m+1}$ gezeigt werden. Dies ist äquivalent zu

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \left(1 + \frac{1}{2m+1}\right) \geq 1,$$

was gültig ist, da der zweite Klammerterm immer größer als Eins ist und der erste monoton wachsend gegen e strebt und für $m=1$ bereits den Wert Zwei hat. Damit erhalten wir die Abschätzung $|\alpha_{j,m}| \leq m^m$ für alle j , die ihrerseits wieder $|\beta_{j,m}(r)| \leq (2m+1)m^{2m} \leq 3m^{2m+1}$ liefert. Schließlich gelangen wir zu $|\gamma_{j,m}(r)| \leq 2m(3m^{2m+1} + 3(m+1)^{2m+3}) \leq 12(m+1)^{2m+4}$ und können nun die Summe behandeln. Für $r \geq r_m$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^{2m+2} \gamma_{j,m}(r) r^{-j} \right| &\leq 12(m+1)^{2m+4} \sum_{j=1}^{2m+2} r^{-j} \\ &\leq 24(m+1)^{2m+5} / r \leq 1/2, \end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Damit haben wir für ungerade Raumdimensionen den ersten Teil der am Anfang dieses Kapitels behaupteten Asymptotik bewiesen. Wir fassen dies zusammen in

Korollar 6.5 *Zu $d = 2n + 1$ und $\ell = n + k + 1 \geq 2$ gibt es Konstanten $c_1 > 0$ und $r_0 \geq 0$, so daß*

$$\mathcal{F}_d \psi_{\ell,k}(r) \geq c_1 r^{-d-2k-1}$$

für $r \geq r_0$ gilt. Dabei hängen c_1 und r_0 von d, k ab. □

Wenden wir uns nun den oberen Schranken zu. Dabei benutzen wir einen anderen Zugang als bei den unteren Schranken. Wir betrachten allgemein die Funktion

$$f_m(r) := \frac{1}{B_m} \int_0^r (r-t)^{m+1} t^{m+1/2} J_{m-1/2}(t) dt \quad (6.4)$$

mit

$$B_m = \frac{m!(m+1)!2^{m+1/2}}{\sqrt{\pi}}. \quad (6.5)$$

Dieser Faktor läßt sich durch den folgenden Satz erklären, der eine induktive Berechnungsweise der Funktionen angibt, die in [1] hergeleitet wird.

Satz 6.6 *Es gilt $f_0(r) = 1 - \cos(r)$ und für $m > 0$*

$$f_m(r) = f_0 \star f_{m-1}(r) := \int_0^r f_0(t)f_{m-1}(r-t)dt.$$

Man beachte den Unterschied in der Definition der Faltungsoperatoren $*$ und \star . Ist $*$ mit der Fouriertransformation im Sinne von Bemerkung 4.11 verträglich, so ist \star im gleichen Sinne mit der Laplacetransformation

$$(\mathcal{L}f)(r) = \int_0^\infty e^{-rt}f(t)dt$$

verträglich, d.h. es gilt $\mathcal{L}(f \star g) = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g)$. Man erkennt, daß das Integral in (6.4) vom Faltungstyp bezüglich \star ist, und man beweist den letzten Satz einfach, indem man nachweist, daß beide Seiten die Laplacetransformierte

$$(\mathcal{L}f_m)(r) = \frac{1}{r^{m+1}(1+r^2)^{m+1}}$$

besitzen. Allgemeines zur Laplacetransformation findet man z.B. in dem Buch [61] von Widder.

Wir fassen einige einfache Eigenschaften dieser Funktion zusammen.

Satz 6.7 *Die gemäß (6.4) mit (6.5) definierten Funktionen genügen*

- (1) $\mathcal{F}_{2m+1}\psi_{m+1}(r) = B_m r^{-3m-2} f_m(r)$,
- (2) $f_m(r) > 0$ für $m > 0$, $r > 0$,
- (3) $f_m(r) \leq \frac{2^{m+1}}{m!} r^m$,
- (4) $f_m(r) = \mathcal{O}(r^{3m+2})$ für $r \rightarrow 0$.

Beweis: Die erste Aussage entspricht gerade (6.1), die zweite erhält man aus Lemma 6.1 bzw. aus dem letzten Satz. Aussage (3) erhält man induktiv sofort aus Satz 6.6, während die letzte Aussage einfach aus der ersten folgt. \square

Die erste Aussage dieses Satzes verdeutlicht unser Interesse an der Funktion f_m . Sie ergibt mit Aussage (3) sofort das gewünschte Resultat. Sie zeigt außerdem, daß die rigorose Abschätzung der unendlichen Reihe in Korollar 6.2 unproblematisch ist.

Korollar 6.8 Zu $d = 2n + 1$ und $\ell = n + k + 1$ gibt es eine Konstante $c_2 = c_2(d, k) > 0$, so daß für $r \geq 0$ die Abschätzung

$$\mathcal{F}_d \psi_{\ell, k}(r) \leq c_2 r^{-d-2k-1}$$

gilt. □

6.1.2 Gerade Raumdimension

Wir werden nun die Ergebnisse für den Fall $d = 2n$ beweisen. Auch hier ist damit $\ell = n + k + 1 =: m + 1$. Dazu führen wir zuerst an, daß sich die Fouriertransformierte

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{2n} \psi_{\ell, k}(r) &= \mathcal{F}_{2m} \psi_{m+1}(r) \\ &= r^{-3m-1} \int_0^r (r-t)^{m+1} t^m J_{m-1}(t) dt \end{aligned} \quad (6.6)$$

ebenfalls mit den Funktionen $f_0(r) = 1 - \cos(r)$, $f_m(r) = f_{m-1} \star f_0(r)$ beschreiben läßt. Allerdings muß noch eine weitere Faltung durchgeführt werden. Wir setzen

$$g_0(r) := \int_0^r J_0(t) dt$$

und für $m \geq 1$

$$g_m(r) := f_{m-1} \star g_0(r) = \int_0^r f_{m-1}(t-r) g_0(t) dt.$$

Dies liefert dann den folgenden Satz, den man wieder wie Satz 6.6 mit der Laplace-Transformation beweist. Näheres findet man in [1].

Satz 6.9 Ist B_m für $m = n + k$ wie in (6.5) definiert und $\ell = k + n + 1$, so gilt

$$\mathcal{F}_{2n} \psi_{\ell, k}(r) = B_{m-1} r^{-3m-1} g_m(r).$$

□

Da wir die Abschätzungen für f_{m-1} bereits aus dem vorherigen Unterabschnitt kennen, müssen wir nur noch g_0 genauer untersuchen. Ebenso erkennt man, daß für die unteren Schranken $m \geq 2$ benötigt wird, was gleichbedeutend ist mit $k \geq 1$, für $n = 1$.

Lemma 6.10 g_0 erfüllt die folgenden Abschätzungen:

(1) $g_0(t) > 0$ für $t > 0$.

(2) Es gibt ein t_0 , so daß $1/2 \leq g_0(t) \leq 3/2$ für $t \geq t_0$ gilt. Insbesondere ist $g_0(t)$ beschränkt.

Beweis: Die erste Behauptung ist gerade eine Ungleichung, die auf Cooke [12] zurückgeht, wogegen die zweite Behauptung aus

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_0(t) = \int_0^{\infty} J_0(s) ds = 1$$

(vgl. [17] 19.2(1)) folgt. □

Damit sind wir nun in der Lage, die anfänglich gemachte Behauptung auch für den Fall gerader Raumdimensionen zu beweisen. Wir formulieren das Ergebnis in Hinblick auf den letzten Unterabschnitt für beliebige Raumdimension.

Satz 6.11 Für jede Raumdimension d und jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es eine Konstante c_2 , so daß mit $\ell = \lfloor d/2 \rfloor + k + 1$ die obere Abschätzung

$$\mathcal{F}_d \psi_{\ell, k}(r) \leq c_2 r^{-d-2k-1} \quad \text{für } r > 0$$

gilt. Ist $d \geq 3$ für $k = 0$ und sonst beliebig, so gibt es Konstanten $c_1, r_0 > 0$, so daß zusätzlich die untere Abschätzung

$$c_1 r^{-d-2k-1} \leq \mathcal{F}_d \psi_{\ell, k}(r) \quad \text{für } r \geq r_0$$

gültig ist. Die Konstanten c_1, c_2, r_0 hängen nur von d und k ab.

Beweis: Der Beweis ist nur noch für gerade Raumdimension $d = 2n$ zu führen. Benutzen wir die vorhergehenden Bezeichnungen, so ist zu zeigen, daß sich $g_m(r)$ asymptotisch wie r^m verhält. Im folgenden wird C der Einfachheit halber eine Konstante mit wechselndem Wert bezeichnen. Wir beginnen mit der Abschätzung nach oben. Nach dem vorangehenden Lemma gilt $0 \leq g_0(t) \leq C$ für alle $t \geq 0$ mit einer geeigneten Konstanten C . Damit erhält man

$$g_m(r) = \int_0^r f_{m-1}(t) g_0(r-t) dt \leq C \int_0^r t^{m-1} dt = Cr^m.$$

Diese Abschätzung ist sogar für alle $r \geq 0$ gültig. Kommen wir zur unteren Schranke. Hier wählen wir zunächst r'_0 so groß, daß für $r \geq r'_0/2$ sowohl $f_{m-1}(r) \geq Cr^{m-1}$ als auch $g_0(r) \geq 1/2$ gilt. Da ferner $g_0(r)$ und $f_{m-1}(r)$ für alle $r > 0$ positiv sind, erhält man für $r \geq r'_0$

$$\begin{aligned}
g_m(r) &= \left(\int_0^{r'_0/2} + \int_{r'_0/2}^{r/2} + \int_{r/2}^r \right) f_{m-1}(t)g_0(r-t)dt \\
&\geq \int_{r'_0/2}^{r/2} f_{m-1}(t)g_0(r-t)dt \geq C/2 \int_{r'_0/2}^{r/2} t^{m-1}dt \\
&\geq Cr^m
\end{aligned}$$

für $r \geq r_0$ mit hinreichend großem r_0 . □

6.2 Fehlerabschätzungen

Hat man eine positiv definite Funktion Φ , paarweise verschiedene Stützstellen $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ und Funktionswerte $f(x_1), \dots, f(x_N)$ gegeben, so läßt sich die Interpolante s_f aus dem Raum $\mathcal{T}(\Phi, X) = \text{span}\{\Phi(\cdot - x_1), \dots, \Phi(\cdot - x_N)\}$ auch schreiben als

$$s_f(x) = \sum_{j=1}^N f(x_j)u_j^*(x), \quad (6.7)$$

wobei die $u_j^*(x)$ durch das Gleichungssystem

$$A_{\Phi, X}u^*(x) = R_{\Phi, X}(x) \quad (6.8)$$

mit $u^*(x) = (u_j^*(x))_{1 \leq j \leq N}$, $R_{\Phi, X}(x) = (\Phi(x - x_j))_{1 \leq j \leq N}$ und der Interpolationsmatrix $A_{\Phi, X} = ((\Phi(x_i - x_j))_{1 \leq i, j \leq N})$ bestimmt sind. Läßt man in (6.7) auch beliebige $u_j(x)$ zu, so gilt nicht mehr notwendig $s_f(x_j) = f(x_j)$ und man spricht daher von Quasi-Interpolation.

Wir wollen hier klären, wie das Approximationsverhalten dieser (Quasi-)Interpolanten unter Benutzung der Funktionen $\psi_{\ell, k}$ minimalen Grades ist.

Um Approximationsaussagen machen zu können, muß man zum einen die Menge der zu approximierenden Funktionen spezifizieren, zum anderen muß man eine Größe definieren, in der das Verhalten gemessen wird. Der Raum der zulässigen Funktionen \mathcal{R}_Φ soll hier aus allen Funktionen $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ bestehen, die sich schreiben lassen als

$$f(x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega) e^{ix^T \omega} d\omega, \quad (6.9)$$

wobei \hat{f} eine Funktion ist, die zusätzlich

$$\hat{f}/\sqrt{\hat{\Phi}} \in L_2(\mathbb{R}^d) \quad (6.10)$$

erfüllt. Auf \mathcal{R}_Φ hat man dann die natürlich Norm

$$\|f\|_\Phi^2 = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{f}(\omega)|^2}{\hat{\Phi}(\omega)} d\omega. \quad (6.11)$$

Es gibt andere Möglichkeiten, den Raum \mathcal{R}_Φ einzuführen (vgl. [24, 31, 32, 58, 63]), auf die hier genauso wenig eingegangen werden soll, wie auf die Problematik, Funktionen nur auf einem Teilgebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ zu betrachten (vgl. [51]). Wichtig ist hier nur, daß für diese Funktionen die Abschätzung

$$|f(x) - s_f(x)| \leq \|f\|_\Phi P(x, X, \Phi) \quad (6.12)$$

mit der sogenannten Powerfunktion

$$P^2(x, X, \Phi) = \Phi(0) - 2 \sum_{j=1}^N u_j^*(x) \Phi(x - x_j) + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N u_j^*(x) u_k^*(x) \Phi(x_j - x_k) \quad (6.13)$$

gültig ist, die man mittels Umkehrformel und Cauchy-Schwarzscher Ungleichung beweist. Dabei sind die $u_j^*(x)$ gerade die Lösungen von (6.8). Man kann zeigen, daß die $u_j^*(x)$ den Ausdruck der rechten Seite in (6.13) minimieren (in der Regel werden an die u_j , über die minimiert werden soll, Bedingungen gestellt, die hier aber aufgrund der unbedingten positiven Definitheit entfallen), so daß eine übliche Vorgehensweise zur weiteren Abschätzung von (6.12) die Ersetzung der $u_j^*(x)$ durch geeignete $\tilde{u}_j(x)$ in (6.13) ist. Aufgrund des asymptotischen Verhaltens der Fouriertransformierten gelten für die natürlichen Funktionenräume der Funktionen minimalen Grades die folgenden Aussagen.

Satz 6.12 Sei $\Phi(x) = \psi_{\ell,k}(\|x\|)$, $\psi_{\ell,k} \in \mathbf{PD}_d \cap C^{2k}$ mit Ausnahme der C^0 -Funktionen in \mathbb{R} und \mathbb{R}^2 . Dann gilt

$$\mathcal{R}_\Phi = H^{k+\frac{d+1}{2}}(\mathbb{R}^d) \subseteq C^k(\mathbb{R}^d),$$

wobei $H^s(\mathbb{R}^d)$ wie üblich den Sobolevraum bezeichnet. Ferner sind auf \mathcal{R}_Φ die Norm $\|\cdot\|_\Phi$ und die Sobolevnorm äquivalent.

Beweis: Die Inklusion ist gerade einer der Sobolevschen Einbettungssätze. Es ist also nur die Identität zu zeigen. Die Fouriertransformierten der angegebenen Basisfunktionen haben das asymptotische Verhalten

$$\hat{\Phi}(\omega) \sim (1 + \|\omega\|^2)^{-\frac{d}{2}-k-\frac{1}{2}}. \quad (6.14)$$

Ist also $f \in \mathcal{R}_\Phi$, so liefert die Forderung (6.10) mittels Hölderscher Ungleichung, daß $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d)$ gilt. Insbesondere folgt mit (6.9), daß auch $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$ liegt, was aber wegen (6.14) gerade $f \in H^{k+(d+1)/2}(\mathbb{R}^d)$ bedeutet. Ist andererseits

$f \in H^{k+(d+1)/2}(\mathbb{R}^d)$ gegeben, so liefert (6.14) gerade (6.10), so daß nur noch die Inversionseigenschaft (6.9) zu zeigen ist. Man erhält wie eben $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d)$, so daß

$$g(x) := (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega) e^{ix^T \omega} d\omega$$

wohldefiniert und stetig ist. Ferner stimmt g mit f im L_2 -Sinn überein. Da beide Funktionen stetig sind, gilt auch punktweise $f = g$, was (6.9) bedeutet. \square

Die Approximationsgüte wird, um auf den zweiten Punkt einzugehen, in Abhängigkeit der Dichte der Stützstellen

$$h_\rho(x) = \max_{\|y-x\| \leq \rho} \min_{1 \leq j \leq N} \|y - x_j\| \quad (6.15)$$

mit einem $\rho > 0$ gemessen. Sie ist bestimmt durch die Glätte der zugrunde liegenden Basisfunktion. Man sagt, daß die Basisfunktion Φ die lokale Approximationsgüte β besitzt, wenn für $\rho > 0$ eine Konstante $h_0 = h_0(\rho, \Phi)$ existiert, so daß für alle $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subseteq \mathbb{R}^d$ und alle $x \in \mathbb{R}^d$ mit $h_\rho(x) \leq h_0$ die Abschätzung

$$|f(x) - s_f(x)| \leq C \|f\|_\Phi h_\rho^\beta(x) \quad (6.16)$$

gilt.

Betrachten wir also die Funktionen $\psi_{\ell,k} \in C^{2k} \cap \mathbf{PD}_d$ mit $\ell = \lfloor d/2 \rfloor + k + 1$ als Basisfunktionen Φ . Ihre Fouriertransformierte ist positiv und besitzt das Verhalten

$$\mathcal{F}_d \psi_{\ell,k}(r) \leq C \|x\|^{-d-2k-1}, \quad r = \|x\|. \quad (6.17)$$

Hierdurch erhält man nach [63]:

Satz 6.13 *Die Funktionen minimalen Grades $\psi_{\ell,k} \in C^{2k} \cap \mathbf{PD}_d$ besitzen die Approximationsgüte $k + 1/2$.* \square

Die bisher geschilderte Vorgehensweise hat den Nachteil, daß bei immer enger liegenden Stützstellen, also $h = h_\rho(x) \rightarrow 0$, der Vorteil einer dünn besetzten Interpolationsmatrix, resultierend aus dem kompaktem Träger von Φ , verloren geht. Daher versucht man den Träger von Φ in Abhängigkeit von h zu skalieren, d.h. man interpoliert bzw. approximiert mit $\Phi_\delta = \Phi(\cdot/\delta)$ statt mit Φ und wählt δ als Funktion von h . Ist z.B. $\delta = ch$, so hat man annähernd eine konstante Anzahl von Interpolationspunkten im Träger, und man spricht vom stationären Fall. Tatsächlich wurden die Begriffe stationär und nichtstationär in diesem Zusammenhang ursprünglich bei der Approximation auf dem Gitter $h\mathbb{Z}^d$ benutzt. Dort bildet man Approximanten der Form

$$s_{f,h}(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} f(jh) \Phi_{(h)}\left(\frac{x}{h} - j\right),$$

wobei $\Phi_{(h)}$ im Gegensatz zu Φ_δ eine von h beliebig abhängige Basisfunktion ist. Üblicherweise benutzt man nicht die Basisfunktion selbst, sondern Lokalisierungen, die ein besseres Abklingverhalten haben, um Konvergenz zu erzwingen. Wählt man $\Phi_{(h)} = \Phi$ für alle h , so spricht man vom stationären, sonst vom nichtstationären Fall. Daß diese Begriffsbildung der obigen entspricht, sieht man z.B., wenn man $\Phi_{(h)} = \Phi(\cdot/h)$ wählt. Dann erhält man nämlich

$$s_{f,h}(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} f(jh) \Phi(x - jh),$$

was gerade der Quasiinterpolation an den Stützstellen $jh \in \mathbb{Z}^d$ entspricht. Ebenso entspricht die Quasiinterpolation mit $\Phi_\delta = \Phi(\cdot/\delta)$ mit $\delta = h$ gerade der stationären Approximation, denn es gilt

$$s_{f,h}(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} f(jh) \Phi\left(\frac{x}{h} - j\right) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} f(jh) \Phi_\delta(x - jh).$$

Kommen wir nun darauf zurück, die Approximationsgüte für Φ_δ mit $\Phi(x) = \psi_{\ell,k}(\|x\|)$ und $\psi_{\ell,k} \in C^{2k} \cap \mathbf{PD}_d$ zu untersuchen.

Satz 6.14 *Ist Φ gegeben durch eine der optimalen Funktionen $\psi_{\ell,k}$ mit Ausnahme der C^0 -Funktionen in \mathbb{R} bzw. \mathbb{R}^2 , so gilt $\mathcal{F}_\Phi = \mathcal{F}_{\Phi_\delta}$ mit äquivalenten Normen $\|\cdot\|_\Phi$ und $\|\cdot\|_{\Phi_\delta}$.*

Beweis: Da $\hat{\Phi}$ positiv und stetig ist, gilt mit gewissen von δ abhängigen Konstanten $C_1(\delta)$ und $C_2(\delta)$ für $\|\omega\| \leq r_0$

$$C_1(\delta) \leq \frac{\hat{\Phi}(\omega)}{\hat{\Phi}(\delta\omega)} \leq C_2(\delta).$$

Andererseits liefert das asymptotische Verhalten von $\mathcal{F}_d \psi_{\ell,k}$ die Abschätzungen

$$c_1 \delta^{2k+d+1} \leq \frac{\hat{\Phi}(\omega)}{\hat{\Phi}(\delta\omega)} \leq c_2 \delta^{2k+d+1}$$

für $\|\omega\| \geq r_0$ mit gewissen anderen Konstanten c_1, c_2 , so daß man schließlich

$$0 < K_1(\delta) \leq \sup_{\omega \in \mathbb{R}^d} \frac{\hat{\Phi}(\omega)}{\hat{\Phi}(\delta\omega)} \leq K_2(\delta)$$

erhält. Dies erlaubt z.B.

$$\begin{aligned} \|f\|_{\Phi_\delta}^2 &= (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{f}(\omega)|^2}{\hat{\Phi}_\delta(\omega)} d\omega \\ &= (2\pi)^{-d/2} \delta^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{f}(\omega)|^2}{\hat{\Phi}(\omega)} \frac{\hat{\Phi}(\omega)}{\hat{\Phi}(\delta\omega)} d\omega \\ &\leq K_2(\delta) \delta^{-d} \|f\|_\Phi^2. \end{aligned}$$

Ebenso erhält man die andere noch benötigte Ungleichung. \square

Um eine Abschätzung für die Powerfunktion $P(x, X, \Phi_\delta)$ der skalierten Basisfunktion Φ_δ zu erhalten, müssen wir die Größen $u^*(x) \equiv u^*(x, X, \Phi)$ und $h_\rho(x) \equiv h_\rho(x, X)$ untersuchen. Da $A_{\Phi_\delta, X} = A_{\Phi, X/\delta}$ und $R_{\Phi_\delta, X}(x) = R_{\Phi, X/\delta}(x/\delta)$ ist, erhält man aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung in (6.8) zunächst $u^*(x, X, \Phi_\delta) = u^*(x/\delta, X/\delta, \Phi)$ und damit unmittelbar

$$P(x, X, \Phi_\delta) = P(x/\delta, X/\delta, \Phi).$$

Da ferner

$$\begin{aligned} h_\rho(x/\delta, X/\delta) &= \max_{\|y-x/\delta\| \leq \rho} \min_{1 \leq j \leq N} \|y - x_j/\delta\| \\ &= \frac{1}{\delta} \max_{\|y-x\| \leq \rho\delta} \min_{1 \leq j \leq N} \|y - x_j\| \\ &= \frac{1}{\delta} h_{\rho\delta}(x, X) \end{aligned}$$

gilt, erhält man

Korollar 6.15 *Im skalierten Fall $\Phi_\delta = \Phi(\cdot/\delta)$ mit $\Phi(x) = \psi_{\ell,k}(\|x\|)$ und $\psi_{\ell,k} \in C^{2k} \cap \mathbf{PD}_d$ gilt für $h_{\rho\delta}(x, X) \leq \delta h_0(\rho, \Phi) = h_0(\rho\delta, \Phi)$ die Abschätzung*

$$P(x, X, \Phi_\delta) \leq C \left(\frac{h_{\rho\delta}(x, X)}{\delta} \right)^{k+1/2}$$

mit einer Konstanten $C > 0$. \square

Hieran erkennt man, daß sich im stationären Fall $\delta = ch_{\rho\delta}(x, X)$ keine Konvergenzaussage folgern läßt. Ein Kompromiß zwischen stationärem und nichtstationärem Fall wäre z.B. δ langsamer gegen Null gehen zu lassen als $h = h_{\rho\delta}(x, X)$. Dies liefert dann Konvergenz mit nur geringem Verlust in der Struktur der Interpolationsmatrix.

6.3 Konditionsabschätzungen

Wir kommen nun zur Bestimmung von oberen Schranken der Kondition der Interpolationsmatrizen $A_{\Phi, X} = (\Phi(x_j - x_k))_{1 \leq j, k \leq N}$, die bei den hier untersuchten Interpolationsproblemen auftreten. Dabei ist die Kondition einer Matrix A definiert durch $\text{cond}(A) := \|A\| \|A^{-1}\|$. Die Funktion $\Phi(x) = \psi_{\ell,k}(\|x\|)$ wird eine der optimalen Funktionen des letzten Kapitels sein. Die Schranken sollen in Abhängigkeit des Separationsabstandes

$$q_X := \frac{1}{2} \min_{j \neq k} \|x_j - x_k\| \tag{6.18}$$

des Datensatzes $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ ausgedrückt werden, wie es üblicherweise der Fall ist [36, 37, 38, 39, 48]. Wir werden im folgenden beweisen, daß für die Funktionen minimalen Grades mit Ausnahme der C^0 -Funktion über \mathbb{R} die Abschätzung

$$\text{cond}(A_{\psi_{\ell,k},X}) = \mathcal{O}(q_X^{-(d+2k+1)}), \quad q_X \rightarrow 0 \quad (6.19)$$

gilt. Dieses Ergebnis bedeutet insbesondere, daß man einen gegebenen Punktesatz X um weitere Punkte erweitern kann, ohne die Kondition wesentlich zu verschlechtern, sofern man den Separationsabstand nicht verkleinert.

Da es sinnvoll ist, dichter liegende Datensätze mit Basisfunktionen kleineren Trägers zu interpolieren, betrachtet man wieder auch skalierte Formen $\Phi_\delta = \Phi(\cdot/\delta)$ der Basisfunktion. Da eine Interpolation in den Stützstellen $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ mit der skalierten Basisfunktion Φ_δ aber gleichbedeutend mit einer Interpolation in den Stützstellen $X/\delta = \{x_1/\delta, \dots, x_N/\delta\}$ ist, gilt insbesondere für den Separationsabstand

$$q_{X/\delta} = q_X/\delta,$$

so daß eine Wahl $\delta = cq_X$ mit positiver Konstanten c zu

$$\text{cond}(A_{\psi_{\ell,k,\delta},X}) \leq C \quad (6.20)$$

führt. Wir werden uns daher im folgenden auf den nichtstationären Fall mit $\delta = 1$ konzentrieren.

6.3.1 Abschätzungen für $\|A\|$

Obere Schranken für die Kondition einer Matrix A zerfallen in natürlicher Weise in obere Schranken für $\|A\|$ und für $\|A^{-1}\|$. Wir wenden uns nun erstere zu und werden hier allgemeiner als im nächsten Abschnitt vorgehen. Sei dazu $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit Träger in der Einheitskugel $B_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq 1\}$. Seien ferner $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ eine Menge paarweise verschiedener Punkte im \mathbb{R}^d mit Separationsabstand $q_X < 1/2$ und $A_{\Phi,X} = (\Phi(x_j - x_k))$. Die Bedingung an q_X ist keine wirkliche Einschränkung, denn für $q_X \geq 1/2$ reduziert sich die Matrix $A_{\Phi,X}$ auf eine Diagonalmatrix mit $\Phi(0)$ als Diagonaleintrag. Eine erste Abschätzung für die Norm dieser Matrix liefert der Satz von Gerschgorin:

$$\|A_{\Phi,X}\| \leq N \max_{j \neq k} |\Phi(x_j - x_k)|. \quad (6.21)$$

Ist Φ positiv definit und normiert auf $\Phi(0) = 1$, so vereinfacht sich diese Ungleichung zu

$$\|A_{\Phi,X}\| \leq N. \quad (6.22)$$

Um aus dieser Abschätzung eine Motivation für eine obere Schranke in Abhängigkeit des Separationsabstandes zu gewinnen, nehmen wir an, daß die centers x_j auf einem Gitter mit der Gitterweite $2q_X = 1/(N^{1/d} - 1) \leq 1$ liegen. Die Ungleichung bedeutet dabei, daß in jede Richtung des Gitters $N^{1/d} \geq 2$ Punkte liegen. Dann läßt sich (6.22) umformulieren zu

$$\|A_{\Phi, X}\| \leq N = \left(\frac{1}{2q_X} + 1\right)^d \leq q_X^{-d}. \quad (6.23)$$

Ziel ist es nun, eine derartige Abschätzung auch für allgemeine Datensätze zu beweisen.

Lemma 6.16 *Sei $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger $B_1(0)$ und $\max |\Phi(x)| \leq 1$. Sei ferner $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Menge paarweise verschiedener Punkte mit $q_X < 1/2$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^d$ die Abschätzung*

$$\sum_{j=1}^N |\Phi(x - x_j)| \leq 4^d q_X^{-d}. \quad (6.24)$$

Beweis: Der Beweis benutzt einen in diesem Zusammenhang üblichen Trick von Narcowich und Ward [37, 38], der den \mathbb{R}^d in Kugelschalen einteilt. Genauer setzen wir für festes $x \in \mathbb{R}^d$

$$S_k(x) = \{x_j \in X : q_X k \leq \|x - x_j\| < q_X(k+1)\}.$$

Dann gilt nach [38]

- $\text{card}[S_0(x)] \leq 1$,
- $\text{card}[S_k(x)] \leq 3^d k^{d-1}$ für $k \geq 1$.

Ist nun $x_j \in S_k(x)$ für ein k mit $kq_X \geq 1$, so ist $\Phi(x - x_j) = 0$. Also hat man die Abschätzung

$$|\Phi(x - x_j)| \leq \begin{cases} 1 & k < 1/q_X \\ 0 & k \geq 1/q_X. \end{cases}$$

Weil X von den $S_k(x)$ überdeckt wird, erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N |\Phi(x - x_j)| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \text{card}[S_k(x)] \chi_{[0, [1/q_X]]}(k) \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^{[1/q_X]} 3^d k^{d-1} \\ &\leq 1 + 3^d [1/q_X]^d \leq 4^d (1/q_X)^d. \end{aligned}$$

Da x beliebig war, ist die Behauptung bewiesen. \square

Man sieht, daß die Abschätzung sehr grob ist, so daß für praktische Tests mit den in der Ungleichungskette auftretenden Größen verglichen werden sollte. Für unsere Zwecke ist diese Abschätzung aber gut genug.

Satz 6.17 Sei $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ positiv definit. Seien X , q_X und $A = A_{\Phi, X}$ wie bisher definiert. Dann gilt

$$\|A_{\Phi, X}\| \leq 4^d q_X^{-d}.$$

Tatsächlich läßt sich diese obere Schranke nicht nur für die Spektralnorm von $A_{\Phi, X}$ beweisen, sondern für jede p -Norm mit $1 \leq p \leq \infty$. Ferner gilt die Aussage auch für den Fall der „off-center“-Interpolation (vgl. [37]).

Beweis: Unter Ausnutzung von $a^2 + b^2 \geq 2ab$ und des vorhergehenden Lemmas erhält man für $\alpha \in \mathbb{R}^N$ mit $\|\alpha\| = 1$

$$\begin{aligned} \alpha^T A \alpha &\leq \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N |\alpha_j| |\alpha_k| |\Phi(x_j - x_k)| \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N |\Phi(x_j - x_k)| (|\alpha_j|^2 + |\alpha_k|^2) \\ &= \sum_{j=1}^N |\alpha_j|^2 \sum_{k=1}^N |\Phi(x_j - x_k)| \\ &\leq \left(\frac{4}{q_X}\right)^d. \end{aligned}$$

Dies liefert $\|A\| = \sup_{\|\alpha\|=1} \alpha^T A \alpha \leq 4^d q_X^{-d}$. \square

Ein vergleichbares Ergebnis ist von Narcowich, Sivakumar und Ward in [37] unter größerem Aufwand für die Gaußlocken bewiesen worden.

6.3.2 Abschätzungen für $\|A^{-1}\|$

Könnte für die Norm der Interpolationsmatrix $A_{\Phi, X}$ die Schranke noch für allgemeines positiv definites Φ mit kompaktem Träger nachgewiesen werden, benötigt man für die Norm der Inversen der Interpolationsmatrix die Positivität der Fouriertransformierten der Basisfunktion Φ . Dies liegt an der benutzten Technik, die ebenfalls auf Narcowich und Ward [38, 39] zurückgeht (vgl. auch [48, 59]).

Satz 6.18 Sei Φ eine über \mathbb{R}^d positiv definite und integrierbare Funktion mit positiver Fouriertransformierten $\hat{\Phi} > 0$. Sei $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Datensatz paarweise verschiedener Punkte mit Separationsabstand q_X . Ferner seien

$$\varphi_0(r) := \inf_{\|\omega\| \leq 2r} \hat{\Phi}(\omega)$$

und

$$\alpha = 12 \left(\frac{\Gamma^2((d/2) + 1)\pi}{9} \right)^{\frac{1}{d+1}}, \quad \beta = \frac{2^{d+1} \pi^{d/2} \Gamma((d/2) + 1)}{\alpha^d}$$

definiert. Dann gilt die Abschätzung

$$\|A_{\Phi, X}^{-1}\| \leq \beta \frac{q_X^d}{\varphi_0(\alpha/q_X)}. \quad (6.25)$$

□

Da wir aus dem vorherigen Abschnitt wissen, daß sich die Fouriertransformierte unserer optimalen Funktionen nach unten durch

$$\mathcal{F}_d \psi_{\ell, k}(r) \geq Cr^{-(d+2k+1)}$$

für hinreichend großes r abschätzen läßt, erhalten wir die Aussage

Satz 6.19 Seien $\psi_\ell(r) = (1-r)_+^\ell$ und $\psi_{\ell, k}(r) = I^k \psi_\ell(r) \in \mathbf{PD}_d \cap C^{2k}$ die Funktion minimalen Grades mit $\ell = \lfloor d/2 \rfloor + k + 1 > 1$. Gegeben sei ferner ein Datensatz $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subseteq \mathbb{R}^d$ mit Separationsabstand $2q_X = \min_{i \neq j} \|x_i - x_j\| > 0$ und die Interpolationsmatrix $A_{\psi_{\ell, k}, X} = (\psi_{\ell, k}(\|x_i - x_j\|))_{i, j}$. Dann gilt für die Inverse

$$\|A_{\psi_{\ell, k}, X}^{-1}\| = \mathcal{O}(q_X^{-2k-1}), \quad q_X \rightarrow 0. \quad (6.26)$$

Beweis: Die Funktion $\psi_{\ell, k}$ ist wegen $\ell > 1$ nicht die C^0 -Funktion in \mathbb{R} . Sei $\psi_{\ell, k}$ zunächst auch nicht die C^0 -Funktion in \mathbb{R}^2 . Dann gilt nach Satz 6.11

$$\varphi_0(\alpha/q_X) = \min_{\|\omega\| \leq 2\alpha/q_X} \mathcal{F}_d \psi_{\ell, k}(\|\omega\|) \geq C(d, k) q_X^{d+2k+1}.$$

Dabei hängt die Konstante $C(d, k)$ nur von der Raumdimension und der Glätte ab. Satz 6.18 liefert dann

$$\|A_{\psi_{\ell, k}, X}^{-1}\| \leq \beta \frac{q_X^d}{\varphi_0(\alpha/q_X)} \leq C'(d, k) q_X^{-2k-1}.$$

Im Fall der C^0 -Funktion ψ_2 im \mathbb{R}^2 fassen wir die Stützstellen $x_j \in \mathbb{R}^2$ als Punkte im \mathbb{R}^3 auf. Berücksichtigt man, daß ψ_2 auch im \mathbb{R}^3 die optimale C^0 -Funktion darstellt, so erhält man jetzt mit $d = 3$ zunächst $\varphi_0(\alpha/q_X) \geq C(3, 1) q_X^4$ und damit $\|A_{\psi_2, X}^{-1}\| \leq C q_X^{-1}$, so daß die Aussage auch in diesem Fall gilt. □

Wir wollen nun noch kurz darauf eingehen, daß der Exponent $2k + 1$ allgemein nicht besser gewählt werden kann. Zum einen wissen wir nach Satz 6.11, daß die unteren Schranken für die Fouriertransformierte $\mathcal{F}_d \psi_{\ell, k}$ höchstens in der Konstanten verbessert werden können, so daß diese Technik keine besseren Ergebnisse ergeben kann. Andererseits liefert diese Technik die optimalen Exponenten, denn für die Powerfunktion gilt mit $x_0 = x$ und $u_0^*(x) = -1$

$$\begin{aligned} P^2(x, X, \Phi) &= \Phi(0) - 2 \sum_{j=1}^N u_j^*(x) \Phi(x - x_j) + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N u_j^*(x) u_k^*(x) \Phi(x_j - x_k) \\ &= \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N u_j^*(x) u_k^*(x) \Phi(x_j - x_k), \end{aligned}$$

so daß man die sogenannte Unschärferelation erhält (vgl. [48]).

Satz 6.20 Sei P_j die Powerfunktion zu $X \setminus \{x_j\}$. Dann gilt

$$\|A_{\Phi, X}^{-1}\| \geq \frac{1}{\min_{1 \leq k \leq N} P_j^2(x_j)}.$$

□

Ordnet man die Daten x_j nun auf einem Gitter der Gitterweite h an, so gibt es Punkte x mit $h_\rho(x) = h\sqrt{d}/2 = \sqrt{d}q_X$, was zu der Ungleichungskette

$$C_1 q_X^{-2k-1} \leq \|A_{X, \Phi}^{-1}\| \leq C_2 q_X^{-2k-1}$$

führt.

Zusammen mit der Abschätzung aus Satz 6.17 erhält man die bereits in der Einleitung dieses Kapitels erwähnte asymptotische Aussage über die Kondition der Interpolationsmatrix.

Korollar 6.21 Unter den Voraussetzungen von Satz 6.19 gilt

$$\text{cond}(A_{\psi_{\ell, k}, X}) = \mathcal{O}(q_X^{-d-2k-1}), \quad q_X \rightarrow 0.$$

□

Dieses Verhalten der Kondition wurde auch in numerischen Tests [28] bestätigt. Es sei darauf hingewiesen, daß keine der klassischen radialen Basisfunktionen eine derartige theoretische Konditionsabschätzung besitzt. Dies liegt hauptsächlich daran, daß Schranken für die Norm der Interpolationsmatrix in Abhängigkeit des Separationsabstandes bisher nur für Funktionen existieren, die auf jedem \mathbb{R}^d positiv definit sind und deren Darstellungsmaß im Sinne von Satz 3.3 gewissen Bedingungen unterliegt (vgl. [37]). Außerdem soll erwähnt werden, daß in [2] angegeben wird, wie man aus Schranken für die Spektralnorm der Inversen der Interpolationsmatrix Schranken für eine beliebige p -Norm erhält, worauf hier aber nicht weiter eingegangen wird.

Kommen wir noch einmal kurz zum stationären Fall. Dieser zeichnet sich dadurch aus, daß man die skalierte Version $\psi_{\ell, k, \delta} = \psi_{\ell, k}(\cdot/\delta)$ betrachtet und $\delta = cq_X$ setzt. Eine Interpolation mit $\psi_{\ell, k, \delta}$ auf einem Datensatz $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ entspricht dann der Interpolation mit $\psi_{\ell, k}$ auf $X/\delta = \{x_1/\delta, \dots, x_N/\delta\}$.

Korollar 6.22 Unter den Voraussetzungen von Satz 6.19 gilt für die Interpolationsmatrizen von $\psi_{\ell, k, \delta} = \psi_{\ell, k}(\cdot/\delta)$ die asymptotische Abschätzung

$$\text{cond}(A_{\psi_{\ell, k, \delta}, X}) \leq C,$$

für alle Datensätze X mit $q_X \geq q_0$. Dabei hängt C nur von ℓ, k, δ und q_0 , nicht aber von der Lage der x_j ab.

Beweis: Die Aussage ist richtig für alle Datensätze X mit Separationsabstand $q_X = q_0$. Für größeren Separationsabstand fügt man einfach einen weiteren center hinzu, um den Abstand q_0 zu erreichen, was nur die Kondition verschlechtert. Für den erweiterten Datensatz gilt dann die Abschätzung, also erst recht für den ursprünglichen. □

6.3.3 Praktische Schranken

Nachdem wir allgemein asymptotische Schranken für die Kondition der Interpolationsmatrix bestimmt haben, wollen wir jetzt die Funktion

$$\psi_{3,1}(r) = (1-r)_+^4(4r+1) \in \mathbf{PD}_3 \cap C^2 \quad (6.27)$$

näher betrachten. Dabei sind wir insbesondere an der Bedeutung der Aussage $q_X \leq q_0$ interessiert. Da das Hauptproblem in der Bestimmung einer unteren Schranke für die Fouriertransformierte $\mathcal{F}_3\psi_{3,1} = \mathcal{F}_5\psi_3$ besteht, erhalten wir gleichzeitig Aussagen für die Funktionen $\psi_3 \in C^0 \cap \mathbf{PD}_5$ und $\psi_{3,2} \in C^4 \cap \mathbf{PD}_1$.

Die Rekursionsformel aus Satz 6.6 ermöglicht es, untere Schranken der Fouriertransformierten von ψ_{m+1} ebenfalls rekursiv zu berechnen, denn aus $\mathcal{F}_{2m-1}\psi_m(r) \geq S_m(r)$ folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{2m+1}\psi_{m+1}(r) &= B_m r^{-3m-2} \int_0^r f_0(r-t)f_{m-1}(t)dt \\ &= \frac{B_m}{B_{m-1}} r^{-3m-2} \int_0^r f_0(r-t)t^{3m-1}\mathcal{F}_{2m-1}\psi_m(t)dt \\ &\geq 2m(m+1)r^{-3m-2} \int_0^r f_0(r-t)t^{3m-1}S_{m-1}(t)dt. \end{aligned}$$

Wir erinnern noch einmal daran, daß m bestimmt war durch $m = k + n$, was für die Funktion in (6.27) gerade $m = 2$ bedeutet. Man benötigt also, um dieses Verfahren anzuwenden, zunächst eine untere Schranke für $m = 1$. Die Schranken müssen aufgrund der Asymptotik, die im ersten Abschnitt dieses Kapitels hergeleitet wurde, grundsätzlich in der Nähe der Null anders geartet sein als für große Argumente. In der Nähe der Null kann man sogar ein allgemeines Ergebnis beweisen. Die nächsten beiden Sätze findet man implizit in [18].

Satz 6.23 Für $r \leq \sqrt{9m+12}$ gilt

$$\mathcal{F}_{2m+1}\psi_{m+1}(r) \geq \frac{(2m)!(m+1)!}{2^{m-1/2}\Gamma(m+1/2)(3m+2)!} \left[1 - \frac{r^2}{9m+12} \right]. \quad (6.28)$$

Beweis: Der Beweis läßt sich direkt durch Reihenentwicklung der auftretenden Besselfunktion in (6.4) und weitere Schritte führen. Wir benutzen hier aber die Arbeit [18] und die dort verwendete Notation. Setzt man dort in Corollary 1.1 und dem zugehörigen Beweis $\alpha = m - 1/2$, so erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{2m+1}\psi_{m+1}(r) &= r^{-3m-2} \int_0^r (r-t)^{m+1}t^{m+1/2}J_{m-1/2}(t)dt \\ &= \frac{(2m)!(m+1)!}{2^{m-1/2}\Gamma(m+1/2)(3m+2)!} G(3/2, m+1; r) \end{aligned}$$

mit der hypergeometrischen Reihe

$$\begin{aligned} G(\rho, \lambda; \mu) &= {}_1F_2 \left(\begin{matrix} \lambda \\ \rho\lambda, \rho\lambda + 1/2 \end{matrix} \middle| \frac{-\mu^2}{4} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!(\rho\lambda)_n(\rho\lambda + 1/2)_n} \left(\frac{-\mu^2}{4} \right)^n. \end{aligned}$$

Für diese wird am Anfang des Beweises zu Theorem 1 gezeigt, daß sie für $0 \leq \mu \leq \sqrt{2\rho(1+2\rho\lambda)}$ die Ungleichung

$$G(\rho, \lambda; \mu) \geq C_0(\mu) = 1 - \frac{\lambda\mu^2}{2\rho\lambda(2\rho\lambda + 1)}$$

erfüllt. Setzt man schließlich $\rho = 3/2$, $\lambda = m + 1$ und $\mu = r$, so erhält man gerade die Behauptung. \square

Wir geben jetzt eine untere Schranke für den Fall $m = 1$ an. Diese deckt die C^2 -Funktion im \mathbb{R}^1 und die C^0 -Funktion im \mathbb{R}^3 ab.

Satz 6.24 ($m=1$) *Es gilt die untere Schranke*

$$\mathcal{F}_3\psi_2(r) \geq \begin{cases} \frac{8}{5!\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{r^2}{21}\right) & r \leq \sqrt{21} \\ \frac{8}{5\sqrt{2\pi}} r^{-4} & r \geq \sqrt{12}. \end{cases}$$

Man beacht, daß sich die Definitionsbereiche für die beiden Schranken

$$ob(r) = \frac{8}{5!\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{r^2}{21}\right) \quad \text{und} \quad un(r) = \frac{8}{5\sqrt{2\pi}} r^{-4}$$

überschneiden, so daß für alle $r \leq \sqrt{12}$ und alle $s \geq \sqrt{12}$ die Ungleichungskette $ob(r) \geq ob(\sqrt{12}) > un(\sqrt{12}) \geq un(s)$ gilt. Dies bedeutet insbesondere, daß für jedes $M \geq \sqrt{12}$ ebenfalls

$$\min_{0 \leq r \leq M} \mathcal{F}_3\psi_2(r) \geq \frac{8}{5\sqrt{2\pi}} M^{-4}$$

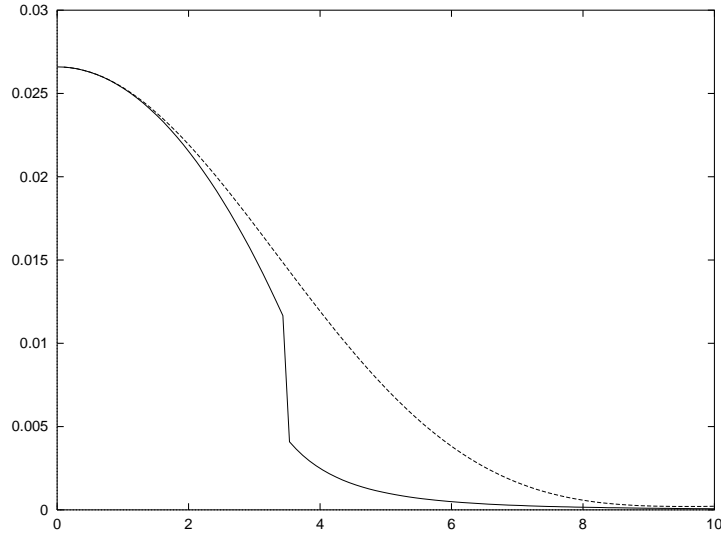
gilt (vgl. auch Abbildung 2).

Beweis: Wir beziehen uns wiederum mit Notation und Verweisen auf die Arbeit [18]. Es gilt die Identität

$$\mathcal{F}_{2m+1}\psi_{m+1}(r) = \frac{(2m)!(m+1)!}{2^{m-1/2}\Gamma(m+1/2)(3m+2)!} G(3/2, m+1; r),$$

so daß jetzt für große r die Reihe auf der rechten Seite abzuschätzen ist. Der Beweis von Theorem 1 liefert für $\mu \geq \sqrt{12}$ und $1 < \lambda \leq 2$ mit $\varepsilon = \lambda - 1$

$$\begin{aligned} G(3/2, \lambda; \mu) &\geq \frac{\Gamma(3\lambda)}{\Gamma(\lambda)} \mu^{-2\lambda} G(\varepsilon, \mu) \\ &\geq 0.453\varepsilon - 0.42\varepsilon^2 + 0.432\varepsilon^3 - 0.286\varepsilon^4 + 0.067\varepsilon^5, \end{aligned}$$

Abbildung 2: Untere Schranke für $\mathcal{F}_3\psi_2$

was mit der Wahl $\lambda = 2$ bzw. $\varepsilon = 1$ gerade der angegebenen Schranke entspricht. \square

Nach diesen Vorbereitungen können wir mit dem angegebenen induktiven Verfahren eine Schranke für die Fouriertransformierte der uns interessierenden Funktion $\psi_{3,1}$ angeben.

Satz 6.25 Die Funktion $\mathcal{F}_5\psi_3(r)$ besitzt die untere Schranke

$$\mathcal{F}_5\psi_3(r) \geq \begin{cases} \frac{6\sqrt{2}}{7!\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{r^2}{30}\right) & r \leq \sqrt{30} \\ \frac{4}{5\sqrt{2\pi}} r^{-6} & r \geq \sqrt{26} \end{cases}$$

Beweis: Die Schranke für $r \leq \sqrt{30}$ erhält man wieder aus Satz 6.23. Für den zweiten Teil der Schranke benutzen wir das vorher beschriebene Verfahren und die Abschätzung für $m = 1$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_5\psi_3(r) &\geq \frac{96}{5\sqrt{2\pi}} r^{-8} \int_{\sqrt{12}}^r f_0(r-t) t dt \\ &= \frac{48}{5\sqrt{2\pi}} r^{-8} \left[2 \cos(\sqrt{12} - r) + 2\sqrt{12} \sin(\sqrt{12} - r) + r^2 - 14 \right] \\ &\geq \frac{48}{5\sqrt{2\pi}} r^{-8} \left[r^2 - 16 - 2\sqrt{12} \right] \\ &\geq \frac{4}{5\sqrt{2\pi}} r^{-6} \end{aligned}$$

für $r \geq \sqrt{26}$. \square

Die Abschätzung im Beweis ist für einen weiteren Schritt ($m = 3$) zu ungenau, da dann eine Lücke im Definitionsbereich zwischen der Schranke in der Nähe der Null und der Schranke für große r entsteht. In diesem Fall gilt wieder, wie für $m = 1$, daß die Schranke in der Nähe der Null innerhalb ihres Definitionsbereiches grundsätzlich größer ist als die zweite Schranke innerhalb deren Definitionsbereiches, so daß wiederum

$$\min_{0 \leq r \leq M} \mathcal{F}_5 \psi_3(r) \geq \frac{4}{5\sqrt{2\pi}} M^{-6}$$

für $M \geq \sqrt{26}$ gilt. Wir wollen uns noch klarmachen, daß diese Forderung $M \geq \sqrt{26}$ keine Einschränkung für unsere Zwecke darstellt. Dafür erinnern wir noch einmal daran, daß das M nach Satz 6.18 die Form $M = 2\alpha/q_X$ hat mit der dort auftretenden Konstanten α und dem Separationsabstand q_X . Dies bedeutet, daß der Separationsabstand des Datensatz $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ der Bedingung

$$q_X \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{26}}$$

unterliegt. Was dies für die einzelnen Funktionen bedeutet, beinhaltet Tabelle 3.

Funktion	Klasse	$q_X \leq$
ψ_3	$C^0 \cap \mathbf{PD}_5$	5.89
$\psi_{3,1}$	$C^2 \cap \mathbf{PD}_3$	4.17
$\psi_{3,2}$	$C^4 \cap \mathbf{PD}_1$	2.46

Tabelle 3: Schranken

Man erkennt, daß diese Einschränkung in der Tat unwichtig ist, da bereits bei $q_X \geq 1/2$ die Interpolationsmatrix A die Form einer Diagonalmatrix mit konstanter Diagonalen hat. Die Abschätzungen für $\|A^{-1}\|$ erhält man unmittelbar aus den Sätzen 6.18 und 6.25.

Symbolverzeichnis

$\ \cdot\ $	euklidische Norm
$\ \cdot\ _{\Phi}$	Norm im native space \mathcal{R}_{Φ}
$\hat{\cdot}$	Fouriertransformation
$*$	Faltung, mit Fouriertransformation verträglich
\star	Faltung, mit Laplacetransformation verträglich
\doteq	Gleichheit bis auf konstanten Faktor
$\lfloor x \rfloor$	größte ganze Zahl kleiner oder gleich x
$A_{\Phi, X}$	Interpolationsmatrix zur Basisfunktion Φ und Datensatz X
$\text{bpd}(m, d)$	Menge der bedingt positiv definiten Funktionen der Ordnung m auf \mathbb{R}^d
d	Raumdimension
∂	Grad eines Polynoms
Δ	Laplace-Operator
\mathcal{F}_d	d -variate Fouriertransformation einer radialen Funktion
$h_{\rho}(x)$	Maß für die Dichte der Stützstellen um x
J_{ν}	Besselfunktion der ersten Art der Ordnung ν
\mathcal{L}	Laplacetransformation
$M_{k, \nu}$	unvollständige Betafunktion
$\phi_{\ell, k}$	Funktionen von Wu
ψ_{ν}	abgeschnittene Potenzfunktion
$\psi_{\ell, k}$	Funktionen minimalen Grades
\mathbb{P}_m^d	Menge der Polynome in d Variablen vom Gesamtgrad kleiner m
\mathbf{PD}_d	$\{\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \phi(\ x\), x \in \mathbb{R}^d \text{ ist positiv definit} \}$
$P(x, X, \Phi)$	Powerfunktion
q_X	Separationsabstand der Stützstellenmenge X
\mathcal{R}_{Φ}	natürlicher Funktionenraum zu Φ
supp	Träger einer Funktion
$\mathcal{T}(\Phi, X)$	lineare Hülle der Translate von Φ um die Elemente von X
X	Euklidischer Hut

Literatur

- [1] R. Askey (1973), Radial Characteristic Functions, MRC Technical Sum: Report no. 1262, University of Wisconsin.
- [2] B. J. C. Baxter, N. Sivakumar, J. D. Ward (1992), Regarding the p -norms of radial basis interpolation matrices, Technical Report 281, Department of Mathematics, Texas A & M University.
- [3] R. K. Beatson, G. N. Newsam (1992), Fast evaluation of radial basis functions, I. Advances in the theory and application of radial basis functions, Comput. Math.Appl. 24, No. 12, pp 7-19.
- [4] S. Bernstein (1928), Sur les fonctions absolument monotones, Acta Mathematica 51, pp 1-66.
- [5] P. Binev, K. Jetter (1992), Estimating the Condition Number for Multivariate Interpolation Problems, in: D. Braess, L. L. Schumaker, eds: Numerical Methods of Approximation Theory, pp. 41-52.
- [6] S. Bochner (1932), Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig.
- [7] S. Bochner (1933), Monotone Funktionen, Stieltjessche Integrale und harmonische Analyse, Math. Annalen 108, pp 378-410.
- [8] D. S. Broomhead, D. Lowe (1988), Multivariable Functional Interpolation and Adaptive Networks, Complex Systems 2, pp 321-355.
- [9] M. D. Buhmann (1993), New Developments in the Theory of Radial Basis Function Interpolation, in: K. Jetter, F. I. Utreras, eds: Multivariate Approximations: From CAGD to Wavelets, pp 35- 75.
- [10] M. D. Buhmann (1995), Radial functions on compact support, Manuskript, Zürich.
- [11] A. Y. Chanysheva (1989), Positive definite functions of a special form, Vestnik Moskovskogo Universiteta Matematika UDC 517.5; 519.2, english translation in : Moscow University Mathematics Bulletin, Vol. 45, No. 5, pp 57-59, 1990.
- [12] R. G. Cooke (1937), A monotonic property of Bessel functions, J. London Math. Soc. 12, pp 279 -284.
- [13] W. F. Donoghue (1969), Distributions and Fourier Transforms, Academic Press, New York and London.
- [14] N. Dyn (1987), Interpolation of Scattered Data by Radial Functions, in: C. K. Chui, L. L. Schumaker, F. I. Utreras, eds: Topics in Multivariate Approximation, pp 47-61.

-
- [15] N. Dyn (1989), Interpolation and Approximation by Radial and Related Functions, in: C. K. Chui, L. L. Schumaker, J. D. Ward, eds: Approximation Theory VI, Vol. 1, pp 211-234.
- [16] N. Dyn, D. Levin, S. Rippa (1986), Numerical Procedures for Surface Fitting of Scattered Data by Radial Functions, SIAM J. Sci. Stat. Comput. Vol. 7 No. 2, pp 639 - 659.
- [17] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi (1954), Tables of integral transforms, Volume II, McGraw-Hill Book Company, New York.
- [18] J. L. Fields, M. E. Ismail (1975), On the Positivity of some ${}_1F_2$'s, Siam J. Math. Anal. Vol. 6, No. 3, pp 551-559.
- [19] M. S. Floater, A. Iske (1995), Multistep Scattered Data Interpolation using Compactly Supported Radial Basis Functions, to appear in Journal of Computational and Applied Mathematics.
- [20] M. S. Floater, A. Iske (1996), Scattered Data Analysis and Industrial Applications, preprint.
- [21] G. Gasper (1975), Positive integrals of Bessel functions, SIAM J. Math. Anal. Vol. 6, No. 5, pp 868-881.
- [22] K. Guo, S. Huo, X. Sun (1993), Conditionally Positive Definite Functions and Laplace-Stieltjes Integrals, J. of Approx. Theory 74, pp 249-265.
- [23] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik (1965), Tables of Integrals, Series and Products, Academic Press, New York.
- [24] A. Iske (1994), Charakterisierung bedingt positiv definiter Funktionen für multivariate Interpolationsmethoden mit radialen Basisfunktionen, Dissertation, Göttingen.
- [25] A. Iske (1995), Reconstruction of Functions From Generalized Hermite-Birkoff Data, in: C. K. Chui, L. L. Schumaker, eds: Approximation Theory VIII, pp 257-264.
- [26] L. Jantscher (1971), Distributionen, de Gruyter, Berlin.
- [27] D. S. Jones (1982), The Theory of Generalised Functions, Cambridge University Press, Cambridge.
- [28] K. Kimme (1995), Praekonditionierungsverfahren für die Matrizen bei der Interpolation mit radialen Basisfunktionen, Diplomarbeit, Universität Göttingen.
- [29] P. Lévy (1962), Extensions d'un théorème de D. Dugué et M. Girault, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, pp 159-173.
- [30] E. Lukacs (1970), Characteristic Functions, Griffin and Company, London.

-
- [31] W. R. Madych, S. A. Nelson (1988), Multivariate Interpolation and Conditionally Positive definite Functions, *Approx. Theory and its Appl.* 4.4, pp 77-89.
- [32] W. R. Madych, S. A. Nelson (1990), Multivariate Interpolation and Conditionally Positive definite Functions II, *Math. Comp.* 54, pp 211-230.
- [33] J. C. Mairhuber (1956), On Haar's theorem concerning Chebychev approximation problems having unique solutions, *Proc. Amer. Math. Soc.* 7, pp 609 - 615.
- [34] A. Makroglou (1994), Radial basis functions in the numerical solution of nonlinear Volterra integral equations, *J. Appl. Sci. Comput.* 1, No. 1, pp 33-53.
- [35] C. A. Micchelli (1986), Interpolation of Scattered Data: Distance Matrices and Conditionally Positive Definite Functions, *Constructive Approximation* 2, pp 11-22.
- [36] F. J. Narcowich, N. Sivakumar, J. D. Ward (1992), Estimates on condition numbers for interpolation matrices associated with certain order 0 radial functions, in: *Proceedings of the Seventh IMACS International Conference on Computer methods for Partial Differential Equations.*
- [37] F. J. Narcowich, N. Sivakumar, J. D. Ward (1994), On Condition Numbers Associated With Radial-Function Interpolation, *J. Math. Anal. Appl.* 186, pp 457-485.
- [38] F. J. Narcowich, J. D. Ward (1991), Norms of Inverses and Condition Numbers for Matrices Associated with Scattered Data, *J. of Approx. Theory* 64, pp 69-94.
- [39] F. J. Narcowich, J. D. Ward (1992), Norm Estimates for the Inverses of a General Class of Scattered-Data Radial-function Interpolation Matrices, *J. of Approx. Theory* 69, pp 84-109.
- [40] F. J. Narcowich, J. D. Ward (1994), Generalized Hermite interpolation via matrix-valued conditionally positive definite functions, *Mathematics of Computation*, Vol. 63, No. 208, pp 661-687.
- [41] F. J. Narcowich, J. D. Ward (1995), Wavelets associated with periodic basis functions, preprint, Texas.
- [42] G. Polyá (1918) Über die Nullstellen gewisser ganzer Funktionen, *Math. Zeit.* 2, pp 352-383.
- [43] M. J. D. Powell (1992), The Theory of Radial Basis Function Approximation in 1990, in W. Light, ed: *Advances in Numerical Analysis Vol. 2*, Clarendon Press, Oxford, pp 105 - 210.
- [44] M. J. D. Powell (1992), Truncated Laurent expansions for the fast evaluation of thin plate splines, *Numer. Algorithms* 5, *Algorithms for Approximation III*, pp 99 -120.

-
- [45] M. J. D. Powell (1992), Tabulation of thin plate splines on a very fine two-dimensional grid, in *Numerical Methods of Approximation Theory*, pp 221-244.
- [46] R. Schaback (1993), Comparison of Radial Basis Function Interpolants, in: K. Jetter, F. I. Utreras, eds: *Multivariate Approximation. From CAGD to Wavelets*, pp 293 - 305.
- [47] R. Schaback (1995), Creating Surfaces from Scattered Data Using Radial Basis Functions, in: M. Daehlen, T. Lyche, L. L. Schumaker, eds: *Mathematical Methods for Curves and Surfaces*, pp 477-496.
- [48] R. Schaback (1995), Error Estimates and Condition Numbers for Radial Basis Function Interpolation, *AICM 3*, pp 251-264.
- [49] R. Schaback (1995), Multivariate Interpolation and Approximation by Translates of a Basis Function, in: C. K. Chui, L. L. Schumaker, eds: *Approximation Theory VIII, volume 1: Approximation and Interpolation*, pp 491 - 514.
- [50] R. Schaback, Z. Wu (1994), *Operators on Radial Functions*, preprint.
- [51] R. Schaback (1996), *Improved Error Bounds for Scattered Data Interpolation by Radial Basis Functions*, Preprint, Göttingen.
- [52] I. J. Schoenberg (1938), Metric Spaces and Completely Monotone Functions, *Annals of Mathematics*, Vol. 39, No. 4, pp 811 - 841.
- [53] E. M. Stein, G. Weiss (1971), *Introduction to Fourier analysis on Euklidean spaces*, Princeton University Press.
- [54] J. Stewart (1976), Positive Definite Functions and Generalizations, an Historical Survey, *Rocky Mountain J. of Mathematics*, Vol. 6, No. 3, pp 409 -434.
- [55] X. Sun (1993), Conditionally Positive Definite Functions and Their Application to Multivariate Interpolations, *J. of Approx. Theory* 74, pp 159-180.
- [56] R. M. Trigub (1989), A Criterion for a Characteristic Function and a Polyá-type Criterion for Radial Functions of several Variables, *Theory Probab. Appl.* 34, pp 738-742.
- [57] G. N. Watson (1966), *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [58] M. Weinrich (1994), *Charakterisierung von Funktionenräumen bei der Interpolation mit radialen Basisfunktionen*, Dissertation, Göttingen.
- [59] H. Wendland (1994), *Ein Beitrag zur Interpolation mit radialen Basisfunktionen*, Diplomarbeit, Göttingen.
- [60] H. Wendland (1995), Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree, *AICM 4*, pp 389 - 396.

-
- [61] D. V. Widder (1946), *The Laplace Transform*, Princeton University Press.
- [62] Z. Wu (1992), Hermite-Birkhoff interpolation of scattered data by Radial Basis Functions, *Approx. Theory Appl.* 8, pp 1-10.
- [63] Z. Wu, R. Schaback (1993) Local Error Estimates for Radial Basis Function Interpolation of Scattered Data, *IMA J. of Numerical Analysis* 13, pp 13-27.
- [64] Z. Wu (1995), Multivariate Compactly Supported Positive Definite Radial Functions, *AICM* 4, pp 283-292.
- [65] Z. Wu (1994), Characterization of Positive Definite Radial Functions, in T. Lyche, M. Daehlen, L. L. Schumaker, eds, *Mathematical Methods for Curves and Surfaces*, pp 573 - 578.
- [66] Z. Wu (1994), *Compactly Supported Radial Functions and the Strang-Fix Condition*, Manuskript, Shanghai.
- [67] T. Yamada, L. C. Wrobel (1993), Properties of Gaussian radial basis functions in the dual reciprocity boundary element method, *Z. Angew. Math. Phys.* 44, No. 6, pp 1054-1067.