

Das inverse Problem in der elektrischen Impedanztomographie

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Bernd Hofmann
aus Lübeck

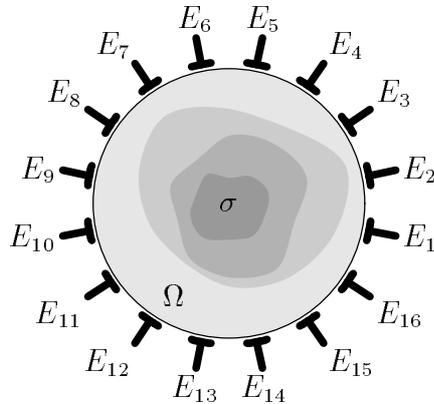
Göttingen 1997

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Allgemeine Bezeichnungen	4
2	Das direkte Problem in der schwachen Formulierung	7
2.1	Existenz und Eindeutigkeit	7
2.2	Fréchet-Differenzierbarkeit	10
2.3	Reziprozität und Sensitivitätssatz	12
3	Das direkte Problem bei stückweise konstanter Leitfähigkeit	14
3.1	Existenz und Eindeutigkeit	14
3.2	Die Ableitung nach der inneren Leitfähigkeit	20
3.3	Die Gebietsableitung	23
4	Das inverse Problem bei stückweise konstanter Leitfähigkeit	31
4.1	Die Injektivität der Gebietsableitung	32
4.1.1	Notationen und Beweisskizze	32
4.1.2	Beweis der Injektivität	36
4.1.3	Literaturübersicht	47
4.2	Ein negatives Resultat für ein vereinfachtes Problem	50
5	Numerische Lösung des inversen Problems	57
5.1	Datenaufnahme und Modellierung	57
5.2	Beschreibung der Verfahren	59
5.2.1	Ein Tikhonov-regularisiertes Newton-Verfahren	60
5.2.2	Ein Verfahren mit ℓ_1 -Strafterm	62
5.2.3	Ein Verfahren für stückweise konstante Leitfähigkeiten	64
5.3	Resultate der numerischen Verfahren	69
5.3.1	Experimente mit synthetischen Daten	69
5.3.2	Rekonstruktionen aus Phantomdaten	76
5.3.3	Rekonstruktionen aus Thoraxdaten	78

1 Einleitung

In der *elektrischen Impedanztomographie* wird die elektrische Leitfähigkeit eines Objektes $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ zur Erzeugung von Querschnittsbildern herangezogen. Dazu werden entlang der Schnittkurve einer Ebene mit dem Rand $\partial\Omega$ eine Anzahl von Elektroden angebracht. Anschließend wird durch einige der Elektroden ein Strom I eingespeist und die übrigen Elektroden zur Spannungsmessung verwendet. Nachdem mehrere solcher Messungen bei verschiedenen Einspeisungen durchgeführt wurden, will man aus den Meßdaten die Leitfähigkeit σ im Querschnitt rekonstruieren.



Im mathematischen Modell wird der Zusammenhang zwischen Ω , σ , I und dem elektrischen Potential u durch das folgende Randwertproblem für eine elliptische partielle Differentialgleichung hergestellt.

$$(1.1a) \quad \operatorname{div}(\sigma \nabla u) = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

$$(1.1b) \quad \sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} = I \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Es ist offensichtlich, daß das Potential u durch diese Gleichungen höchstens bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist. Um u eindeutig festzulegen, wird in dieser Arbeit durchgehend die Normierung

$$(1.1c) \quad \int_{\partial\Omega} u \, ds = 0$$

verwendet. In (1.1) haben wir die Bezeichnungen div für die Divergenz, ∇ für den Gradienten und $\partial/\partial\nu$ für die Ableitung nach der äußeren Einheitsnormalen verwendet. Um das Problem theoretisch und numerisch zu vereinfachen, wird häufig der zweidimensionale Fall $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ betrachtet.

Die Abbildung $\Lambda(\sigma)$, die dem Einspeisestrom I das Randpotential $u|_{\partial\Omega}$ zuordnet, wird als *Neumann-Dirichlet-Abbildung* bezeichnet. Nimmt man idealisierend an, daß man das Potential u für jedes I kontinuierlich entlang des Randes messen kann, so besteht das Problem der Leitfähigkeitsbestimmung gerade darin, die Abbildung $\sigma \mapsto \Lambda(\sigma)$ zu invertieren. Dieses Problem bezeichnet man als das inverse Leitfähigkeitsproblem, die Bestimmung der Lösung u von (1.1) bei gegebenem Ω , σ und I hingegen als das direkte Leitfähigkeitsproblem. Das inverse Problem ist nichtlinear und im Sinne von Hadamard inkorrekt gestellt. Der Beweis der Eindeutigkeit des inversen Problems, das heißt der Injektivität von Λ , ist im \mathbb{R}^n , $n \geq 3$ von Sylvester und Uhlman [31] und im zweidimensionalen Fall von Nachmann [25] erbracht worden. In der Einleitung des letztgenannten Textes findet

man eine umfassende Übersicht über die Veröffentlichungen, die sich mit diesem Thema beschäftigen haben.

Bei den Anwendungen in der medizinischen Diagnostik entstehen die unterschiedlichen Leitfähigkeiten in Ω durch die unterschiedlichen Gewebeeigenschaften der Körperorgane. Sind $D_j \subset \Omega$, $j = 1, \dots, n$, $\bar{D}_j \cap \bar{D}_k = \emptyset$ die von den Organen eingenommenen Gebiete, so darf man annehmen, daß sich die Leitfähigkeit in Ω durch eine Funktion der Form

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_0, & x \in \bar{\Omega} \setminus (D_1 \cup \dots \cup D_n), \\ \sigma_j, & x \in D_j, \end{cases} \quad \sigma_j > 0, \quad j = 0, \dots, n,$$

mit konstanten Werten $\sigma_0, \dots, \sigma_n$ approximieren läßt. Aus dem Randwertproblem (1.1) für eine Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten wird dann ein Transmissionsproblem für den Laplace-Operator. Die Aufgabe der Bildrekonstruktion ist die Bestimmung der Gebiete D_1, \dots, D_n und der Leitfähigkeiten $\sigma_0, \dots, \sigma_n$.

Ist die Neumann-Dirichlet-Abbildung vollständig bekannt, so folgt die Injektivität der Einschränkung von Λ auf die stückweise konstanten Funktionen aus dem Eindeutigkeitsresultat von Kohn und Vogelius [22]. Einen zweiten Beweis von Isakov findet man in [18]. Diese Ergebnisse sind keine direkte Folgerung aus den oben genannten Arbeiten von Sylvester, Uhlmann und Nachmann, weil eine stückweise konstante Leitfähigkeit nicht den dort geforderten Glattheitsbedingungen genügt.

Bei Einschränkung auf stückweise konstante Leitfähigkeiten darf man erwarten, daß sich Eindeutigkeitsaussagen für das inverse Problem auch bei nur partiell bekannter Neumann-Dirichlet-Abbildung beweisen lassen. Die Frage der Eindeutigkeit, wenn das Randpotential nur für eine einzige Einspeisung gegeben ist, ist in mehreren Arbeiten untersucht worden. In Abschnitt 4.1.3 geben wir einen Überblick über die vorhandenen Resultate. Anhand einfacher Gegenbeispiele kann man sich überlegen, daß es im allgemeinen nicht möglich ist, sowohl die Leitfähigkeiten $\sigma_0, \dots, \sigma_n$ als auch die Gebiete D_1, \dots, D_n aus der Messung bei einer einzigen Einspeisung zu rekonstruieren. Dies ist selbst dann nicht möglich, wenn bekannt ist, daß nur ein zusammenhängendes Gebiet $D \subset \Omega$ vorhanden ist. Man setzt daher die Leitfähigkeitswerte als bekannt voraus. Es bedeutet dann keine weitere Einschränkung anzunehmen, daß die Hintergrundleitfähigkeit durch $\sigma_0 = 1$ gegeben ist. Beschränkt man sich bei den Untersuchungen auf ein einziges Gebiet $D \subset \Omega$, so erhält man das folgende inverse Problem.

Bei bekannter innerer Leitfähigkeit $a > 0$ und Einspeisung $I \neq 0$ bestimme das Gebiet D aus den Dirichlet-Randwerten $u|_{\partial\Omega}$ des Potentials u mit

$$(1.2a) \quad \operatorname{div}((\chi_{\Omega \setminus D} + a\chi_D)\nabla u) = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

$$(1.2b) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = I \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Hierbei bezeichnet χ_M , $M \subset \mathbb{R}^n$ die charakteristische Funktion von M . Wie bereits oben erwähnt, läßt sich das zugehörige direkte Problem als Transmissionsproblem für den Laplace-Operator interpretieren (siehe Satz 3.1 und Satz 3.2).

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, Newton-Verfahren für die Leitfähigkeitsrekonstruktion theoretisch und numerisch zu untersuchen. Da uns ein Konvergenzbeweis für die vorgestellten Verfahren nicht gelingen wird, beschränken wir uns im theoretischen Teil darauf, grundlegende Fragen für die Anwendbarkeit von Newton-Verfahren zu klären.

In Abschnitt 2 beweisen wir Existenz und Eindeutigkeit für die schwache Formulierung von (1.1). Dabei verwenden wir eine Standardmethode, die im wesentlichen die Poincarésche Ungleichung und den Satz von Lax-Milgram benutzt. Die Neumann-Dirichlet-Abbildung Λ läßt sich jetzt als Abbildung zwischen geeigneten Sobolev-Räumen auf dem Rand $\partial\Omega$ definieren. Aus der auf diesem Weg gewonnenen Darstellung für die Lösung u des direkten Problems (1.1) ist die Fréchet-Differenzierbarkeit von Λ in Abhängigkeit von der Leitfähigkeit leicht abzuleiten. Außerdem erhält man eine Charakterisierung des Differential als Neumann-Dirichlet-Abbildung eines Leitfähigkeitsproblems, bei dem auf der rechten Seite von (1.1a) eine Inhomogenität vorgegeben ist.

In den folgenden Abschnitten behandeln wir das direkte und das inverse Problem, falls die Leitfähigkeit von der Form

$$\sigma = \chi_{\bar{\Omega} \setminus D} + a\chi_D, \quad a > 0$$

ist. Dabei wird D als offen, glatt berandet und zusammenhängend mit $\bar{D} \subset \Omega$ vorausgesetzt. Die Erweiterungen der erzielten Ergebnisse auf den Fall, daß in Ω mehrere Gebiete D_1, \dots, D_n enthalten sind, werden sich jeweils in einfacher Weise ergeben.

Wir zeigen zunächst wieder Existenz und Eindeutigkeit des direkten Problems. Hier führt ein klassischer Ansatz von u als Einzelschichtpotential über die Ränder $\partial\Omega$ und ∂D mit Hilfe der Fredholm-Theorie zum Ziel. Dies ermöglicht es uns, von jetzt an $\Lambda(\sigma)$ durch Einschränkung auf stetige Einspeisungen I als Abbildung zwischen Räumen stetiger Funktionen auf $\partial\Omega$ aufzufassen. Danach beweisen wir die Differenzierbarkeit von Λ in Abhängigkeit von a und D . Ähnlich wie für die schwache Formulierung leiten wir auch wieder Charakterisierungen der Differentiale her. Die Resultate für die Gebietsableitung folgen aus den Arbeiten [27], [28] von Potthast. Wir werden in Abschnitt 3.3 lediglich die bei der Charakterisierung auftretenden Randbedingungen auf eine Form bringen, die von Hettlich [16] aus der schwachen Formulierung für den allgemeineren Fall der Helmholtzgleichung hergeleitet worden ist.

Danach beweisen wir unser theoretisches Hauptergebnis. Wir zeigen, daß im zweidimensionalen Fall für $I \neq 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $D \subset \Omega$ die Gebietsableitung des Randpotentials $\Lambda(\chi_{\bar{\Omega} \setminus D} + a\chi_D; I)$ nicht verschwindet. Das bedeutet, daß die bezüglich des Gebietes linearisierte Version des inversen Problems (1.2) eindeutig ist. Hierfür müssen wir noch voraussetzen, daß das Gebiet D , bei dem das

Differential betrachtet wird, einfach zusammenhängend ist. Ein entsprechende Aussage für nicht einfach zusammenhängendes D läßt sich durch Gegenbeispielen widerlegen.

Im Abschnitt 4.2 werden wir ein Ergebnis herleiten, das die Vermutung nahelegt, daß eine globale Eindeutigkeitsaussage für das inverse Problem (1.2) nicht richtig ist. Dies geschieht, indem wir das Potential u in (1.2) bezüglich der Leitfähigkeit a bei $a = 1$ linearisieren. Es wird gezeigt, daß das so entstandene Hilfsproblem im \mathbb{R}^2 für gewisse Einspeisungen äquivalent zum inversen Quellproblem ist, welches darin besteht, ein Gebiet aus der Kenntnis seines Newton-Potentials auf einer Kurve außerhalb des Gebietes zu bestimmen. Es ist bekannt (siehe [19]), daß für dieses Problem eine globale Eindeutigkeitsaussage in der Klasse der zusammenhängenden und einfach zusammenhängenden Gebiete nicht richtig ist.

Im letzten Abschnitt behandeln wir die numerische Lösung des inversen Problems. Ein wesentliches Merkmal eines Algorithmus zur Leitfähigkeitsrekonstruktion ist der verwendete Löser für das direkte Problem. Die Diskretisierung der schwachen Formulierung aus Abschnitt 2 führt auf die Finite-Elemente-Methode. Setzt man σ als stückweise konstant voraus, so sind die Randintegralgleichungen aus Abschnitt 3.1 zu diskretisieren. Wir werden Rekonstruktionsmethoden für die beiden sich hieraus ergebenden Klassen beschreiben und diese anhand verschiedener Datensätze vergleichen. Neben synthetisch erzeugten Daten verwenden wir hierfür auch real gemessene Datensätze, die aus der medizinischen Anwendung der Impedanztomographie stammen.

Ich bedanke mich bei Prof. Dr. R. Kreß für die Betreuung dieser Arbeit und bei Prof. Dr. R. Schaback für die Übernahme des Korreferates. Ferner gilt mein Dank Dr. E. Gersing, der mein Interesse an der Impedanztomographie geweckt hat, und den Mitarbeitern der Abteilung für anaesthesiologische Forschung des Göttinger Klinikums für die Überlassung der in dieser Arbeit verwendeten Meßdaten. Bei der Deutschen Forschungsgemeinschaft möchte ich mich für die finanzielle Unterstützung bedanken.

1.1 Allgemeine Bezeichnungen

Wir fassen in diesem Abschnitt die Bezeichnungen zusammen, die im Text ohne weitere Erwähnung benutzt werden.

Mit \mathbb{N} , \mathbb{R} , \mathbb{C} bezeichnen wir die Mengen der natürlichen, reellen beziehungsweise komplexen Zahlen. Für $z \in \mathbb{C}$ seien $\operatorname{Re} z$ und $\operatorname{Im} z$ der Real- beziehungsweise Imaginärteil von z und \bar{z} die zu z konjugierte Zahl $\operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z$, $i := \sqrt{-1}$. Der Absolutbetrag von z wird mit $|z|$ bezeichnet.

Das Standardskalarprodukt und die euklidische Norm in \mathbb{R}^n wird als $\langle \cdot, \cdot \rangle$ beziehungsweise $|\cdot|$ geschrieben. Ist A eine reelle Matrix, so bezeichnen wir die transponierte Matrix mit A^T .

Ist $M \subset \mathbb{R}^n$, so sei $\chi_M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion von M und $\mathbb{1}_M : M \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion mit $\mathbb{1}_M(x) = 1$ für alle $x \in M$. Mit \bar{M} und ∂M bezeichnen wir den Abschluß beziehungsweise den Rand von M .

Es sei M jetzt eine berandete oder unberandete Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n . Bei der folgenden Einführung der Notationen für die Standardfunktionsräume auf M seien zunächst alle Funktionen reellwertig.

Es sei $C(M)$ der Raum der stetigen Funktionen auf M und $C^\alpha(M) \subset C(M)$, $0 < \alpha < 1$ bezeichne den Unterraum der α -hölderstetigen Funktionen, das heißt der beschränkten, stetigen Funktionen f mit

$$|f|_{C^\alpha(M)} := \sup_{\substack{x, y \in \mathbb{R}^n \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty.$$

Es sei $C^k(M)$, $k \in \mathbb{N}$ der Raum der k -fach stetig differenzierbaren Funktionen auf M und $C^{k,\alpha}(M) \subset C^k(M)$ der Unterraum der Funktionen, für die die k -ten partiellen Ableitungen α -hölderstetig auf M sind. Für eine stetige Funktion f sei $\text{Trg}(f)$ der Träger von f .

Es sei $L^p(M)$, $1 \leq p < \infty$ der Raum der meßbaren Funktionen auf M mit $\int_M |f|^p dx < \infty$ und $L^\infty(M)$ der Raum der fast überall beschränkten Funktionen auf M . Wie üblich betrachten wir die Räume $L^p(M)$ als Restklassenräume modulo der fast überall verschwindenden Funktionen.

Es sei $H^1(M) \subset L^2(M)$ der Teilraum der Funktionen, deren erste partielle Ableitungen im distributionellen Sinne existieren und in $L^2(M)$ liegen. Der zu $H^1(M)$ duale Raum wird mit $H^{-1}(M)$ bezeichnet. Die Definition der Räume $H^{1/2}(M)$, $H^{-1/2}(M)$ und die grundlegenden Eigenschaften der Sobolev-Räume findet man in [32] oder [33].

Die entsprechenden Räume komplexwertiger Funktionen bezeichnen wir durch einen unteren Index \mathbb{C} . Wir schreiben also zum Beispiel $C(M)_\mathbb{C}$ für den Raum der komplexwertigen, stetigen Funktionen auf M .

Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, glatt berandet und \bar{M} kompakt, so bezeichnen wir mit $|M|$ das n -dimensionale Volumen von M und mit $|\partial M|$ das $(n - 1)$ -dimensionale Volumen des Randes von M .

Sind X, Y Banach-Räume, so sei $\text{Hom}(X, Y)$ der Raum der stetigen, linearen Abbildungen von X nach Y . Es sei $\text{End}(X) := \text{Hom}(X, X)$ und $\text{Aut}(X) \subset \text{End}(X)$ die Teilmenge der stetig invertierbaren Elemente. Für $A \in \text{Hom}(X, Y)$ bezeichnen $\text{Ker}(A)$ und $\text{Bild}(A)$ den Kern beziehungsweise das Bild von A . Mit X^* bezeichnen wir den topologische Dualraum $\text{Hom}(X, \mathbb{R})$.

2 Das direkte Problem in der schwachen Formulierung

Will man Newton-Methoden zur Invertierung der Abbildung

$$\sigma \mapsto \Lambda(\sigma)$$

benutzen, so benötigt man Verfahren zur Berechnung von Λ und des Differentialials von Λ . Zur numerischen Lösung des direkten Problems wird später die Finite-Elemente-Methode benutzt, die eine Diskretisierung der schwachen Formulierung von (1.1) darstellt. Wir beweisen daher in diesem Abschnitt zunächst die Existenz und Eindeutigkeit für das direkte Problem in der schwachen Formulierung. Dann zeigen wir die Differenzierbarkeit von Λ in Abhängigkeit von der Leitfähigkeit. Anschließend leiten wir noch zwei Formeln her. Die erste ist eine Reziprozitätsformel für das Randwertproblem (1.1), die zweite ist in der Literatur als Sensitivitätssatz bekannt. Die letztgenannte Formel liefert eine effiziente Methode zur numerischen Berechnung des Differentialials von Λ .

2.1 Existenz und Eindeutigkeit

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, zusammenhängend und C^1 -glatt berandet. Für den Beweis der Fréchet-Differenzierbarkeit des durch (1.1) definierten Potentials in Abhängigkeit von der Leitfähigkeit σ benötigen wir eine geeignete Darstellung dieses Potentials. Hierfür werden wir zunächst Existenz und Eindeutigkeit des direkten Problems zeigen.

Es seien

$$H_*^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : \int_{\partial\Omega} u \, ds = 0\},$$

und $L_{>0}^\infty(\Omega) := \left\{g \in L^\infty(\Omega) : \inf_{x \in \Omega} \text{ess } g(x) > 0\right\}.$

Die Konvention, die Unterräume der durch $\int_{\partial\Omega} f \, ds = 0$ normierten Funktionen durch ein \star als unteren Index zu kennzeichnen, werden wir auch für andere Funktionenräume verwenden.

Für $u \in C^2(\bar{\Omega})$, $\sigma, v \in C^1(\bar{\Omega})$ erhält man aus dem Gaußschen Satz

$$(2.1) \quad \int_{\Omega} \text{div}(\sigma \nabla u) v \, dx + \int_{\Omega} \sigma \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dx = \int_{\partial\Omega} \sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, ds.$$

Dies gibt Anlaß für die folgende schwache Formulierung von (1.1). Für $I \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$, $\sigma \in L_{>0}^\infty(\Omega)$ finde $u \in H_*^1(\Omega)$ mit

$$(2.2) \quad \forall v \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} \sigma \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dx = \int_{\partial\Omega} I \cdot v \, ds.$$

Wir lassen in (1.1) auf der rechten Seite einen Quellterm q zu, ersetzen also (1.1a) durch

$$(1.1a') \quad \operatorname{div}(\sigma \nabla u) = q \quad \text{in } \Omega,$$

und erhalten so das schwache Problem: Zu $q \in H^{-1}(\Omega)$, I , σ wie oben finde $u \in H_*^1(\Omega)$ mit

$$(2.2') \quad \forall v \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} \sigma \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx = \int_{\partial\Omega} I \cdot v ds - \int_{\Omega} q \cdot v dx.$$

Auf $H^1(\Omega)$ definieren wir ein semi-definites Produkt und eine Halbnorm durch

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} := \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx, \quad |u|_{H^1(\Omega)} := (u, u)_{H^1(\Omega)}^{1/2}, \quad u, v \in H^1(\Omega).$$

Dann sind das Skalarprodukt und die zugehörige Norm auf $H^1(\Omega)$ durch

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + (u, v)_{H^1(\Omega)}, \quad \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + |u|_{H^1(\Omega)}^2$$

gegeben.

Lemma 2.1. *Auf $H_*^1(\Omega)$ ist $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$ eine zu $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ äquivalente Norm. Insbesondere ist $(H_*^1(\Omega), (\cdot, \cdot)_{H^1(\Omega)})$ ein Hilbertraum.*

Bew. Es sei

$$H_{\natural}^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} u dx = 0\}.$$

Das orthogonale Komplement von $H_{\natural}^1(\Omega)$ sind die konstanten Funktionen. Es ist daher

$$H_{\natural}^1(\Omega)^{\perp} \cap H_*^1(\Omega) = \{0\}.$$

$H_{\natural}^1(\Omega)$, $H_*^1(\Omega)$ sind abgeschlossene Hyperebenen in $H^1(\Omega)$. Aus einer einfachen Argumentation folgt jetzt, daß die Einschränkung $P_{\natural}|_{H_*^1(\Omega)}$ der orthogonalen Projektion

$$P_{\natural}(\Omega) : H^1(\Omega) \rightarrow H_{\natural}^1(\Omega), \quad u \mapsto u - \langle u, \varphi \rangle_{H^1(\Omega)} \cdot \varphi, \quad \varphi := \mathbb{1}_{\Omega}/|\Omega|^{1/2}$$

stetig invertierbar ist. Mit der Poincaréschen Ungleichung (siehe [8])

$$(2.3) \quad \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_1 \left(\left| \int_{\Omega} u dx \right|^2 + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right), \quad u \in H^1(\Omega)$$

folgt jetzt für jedes $u \in H_*^1(\Omega)$

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2 \|P_{\natural}(u)\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1 C_2 |P_{\natural}(u)|_{H^1(\Omega)} = C_1 C_2 |u|_{H^1(\Omega)}. \quad \square$$

Satz 2.2. Das Problem (2.2') ist genau dann lösbar, wenn

$$(2.4) \quad \int_{\partial\Omega} I \, ds = \int_{\Omega} q \, dx.$$

gilt. Ist (2.4) erfüllt, so ist die Lösung eindeutig und hängt stetig von I und q ab.

Bew. Ist u eine Lösung des homogenen Problems $I = 0$, $q = 0$, so folgt aus (2.2') $\int_{\Omega} \sigma |\nabla u|^2 \, dx = 0$. Folglich ist u konstant, und aus $\int_{\partial\Omega} u \, ds = 0$ folgt dann sogar $u = 0$. Das Problem besitzt daher höchstens eine Lösung.

Die Notwendigkeit der Bedingung (2.4) folgt, indem man in der Gleichung (2.2') $v = \mathbb{1}_{\Omega}$ setzt.

Es seien jetzt I und q mit (2.4) gegeben. Wir definieren auf $H^1(\Omega)$ die stetige Linearform

$$\phi_{I,q}(v) := \int_{\partial\Omega} I \cdot v \, ds - \int_{\Omega} q \cdot v \, dx, \quad v \in H^1(\Omega).$$

Nach dem Riesz'schen Darstellungssatz existiert ein $u' \in H^1_{\star}(\Omega)$ mit $\phi_{I,q}|_{H^1_{\star}(\Omega)} = (u', \cdot)_{H^1(\Omega)}$, das heißt

$$(2.5) \quad \forall v \in H^1_{\star}(\Omega) : \int_{\Omega} \langle \nabla u', \nabla v \rangle \, dx = \int_{\partial\Omega} I \cdot v \, ds - \int_{\Omega} q \cdot v.$$

Die konstanten Funktionen liegen wegen (2.4) im Kern von $\phi_{I,q}$, und daran erkennt man, daß (2.5) sogar für alle $v \in H^1(\Omega)$ gilt. Aus (2.2) wird klar, daß u' die schwache Lösung von $\Delta u' = q$ und $\partial u' / \partial \nu = I$ ist. Wir setzen $L_{\Delta}(I, q) := u'$. Offensichtlich ist dann

$$L_{\Delta} : \{(I, q) \in H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{-1}(\Omega) : \int_{\partial\Omega} I \, ds = \int_{\Omega} q \, dx\} \rightarrow H^1_{\star}(\Omega), \\ (I, q) \mapsto L_{\Delta}(I, q)$$

linear und stetig.

Die Bilinearform

$$(2.6) \quad b_{\sigma}(u, v) := \int_{\Omega} \sigma \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dx, \quad u, v \in H^1(\Omega)$$

ist auf $H^1_{\star}(\Omega)$ stetig

$$b_{\sigma}(u, v) \leq \|\sigma\|_{\infty} (u, v)_{H^1(\Omega)}, \quad u, v \in H^1_{\star}(\Omega)$$

und koerzitiv

$$b_{\sigma}(u, u) \geq \|1/\sigma\|_{\infty}^{-1} (u, u)_{H^1(\Omega)}, \quad u \in H^1_{\star}(\Omega).$$

Wieder aus dem dem Rieszschen Darstellungssatz folgt die Existenz eines eindeutigen $S(\sigma) \in \text{End}(H_*^1(\Omega))$ mit

$$(2.7) \quad b_\sigma(u, v) = (S(\sigma)u, v)_{H^1(\Omega)}, \quad u, v \in H_*^1(\Omega).$$

Nach dem Satz von Lax-Milgram besitzt $S(\sigma)$ eine stetige Inverse und wir haben für $v \in H_*^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} b_\sigma(S(\sigma)^{-1} \circ L_\Delta(I, q), v) &= (L_\Delta(I, q), v)_{H^1(\Omega)} \\ &= \phi_{I, q}(v). \end{aligned}$$

Auch hier prüft man wieder ohne Schwierigkeiten nach, daß diese Gleichung sogar für alle $v \in H^1(\Omega)$ gilt. Somit ist $S(\sigma)^{-1} \circ L_\Delta(I, q)$ eine Lösung von (2.2'). \square

Wir können jetzt für ein quellfreies Gebiet, das heißt für $q = 0$, den Lösungsoperator

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \mathcal{L} : L_{>0}^\infty(\Omega) &\rightarrow \text{Hom}(H_*^{-1/2}(\partial\Omega), H_*^1(\Omega)), \\ \mathcal{L}(\sigma; I) &:= S(\sigma)^{-1} \circ L_\Delta(I, 0), \end{aligned}$$

und die Neumann-Dirichlet-Abbildung

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \Lambda : L_{>0}^\infty(\Omega) &\rightarrow \text{Hom}(H_*^{-1/2}(\partial\Omega), H_*^{1/2}(\partial\Omega)), \\ \Lambda(\sigma; I) &:= R_{\partial\Omega} \circ \mathcal{L}(\sigma; I), \end{aligned}$$

definieren, dabei ist $R_{\partial\Omega}$ die Spurabbildung

$$R_{\partial\Omega} : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega), \quad u \mapsto u|_{\partial\Omega}.$$

2.2 Differenzierbarkeit in Abhängigkeit von der Leitfähigkeit in der schwachen Formulierung

Die Differenzierbarkeit der Neumann-Dirichlet-Abbildung von (2.2) in Abhängigkeit von σ läßt sich nun leicht aus (2.8) ableiten.

Satz 2.3. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : L_{>0}^\infty(\Omega) &\rightarrow \text{Hom}(H_*^{-1/2}(\partial\Omega), H_*^1(\Omega)), \\ \sigma &\mapsto \mathcal{L}(\sigma; \cdot), \end{aligned}$$

ist unendlich oft Fréchet-differenzierbar. Ist $\sigma_0 \in L_{>0}^\infty(\Omega)$, $\sigma_\delta \in L^\infty(\Omega)$, so ist die Ableitung von \mathcal{L} bei σ_0 in Richtung σ_δ gegeben durch

$$(2.10) \quad (D\mathcal{L}(\sigma_0; \cdot))(\sigma_\delta) = -S(\sigma_0)^{-1} \circ S(\sigma_\delta) \circ S(\sigma_0)^{-1} \circ \mathcal{L}(\mathbb{1}_\Omega; \cdot).$$

Bew. Aus der Definition (2.7) von $S(\sigma)$ ersieht man leicht, daß S linear und stetig von σ abhängt. Benutzt man jetzt den bekannten Satz, daß das Bilden des Inversen

$$\text{Inv} : \text{Aut}(X) \rightarrow \text{Aut}(X), \quad A \mapsto A^{-1}, \quad X \text{ ein Banach-Raum,}$$

Fréchet-differenzierbar ist mit Differential

$$(D\text{Inv}(A_0))(A_\delta) = -A_0^{-1} \circ A_\delta \circ A_0^{-1}, \quad A_0 \in \text{Aut}(X), A_\delta \in \text{End}(X),$$

so folgt die Behauptung aus (2.8). \square

Die Differenzierbarkeit der Neumann-Dirichlet-Abbildung (2.9) erhält man jetzt sofort aus der Stetigkeit der Spurabbildung.

Satz 2.4. *Es sei $I \in H_*^{-1/2}(\partial\Omega)$, $\sigma_0 \in L_{>0}^\infty(\Omega)$, $\sigma_\delta \in L^\infty(\Omega)$ und $u_0 := \mathcal{L}(\sigma_0; I)$ das Potential zur Leitfähigkeit σ_0 und Einspeisung I . Dann ist*

$$u_\delta := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathcal{L}(\sigma_0 + t\sigma_\delta; I)$$

die schwache Lösung von

$$(2.11a) \quad \text{div}(\sigma_0 \nabla u_\delta) = -\text{div}(\sigma_\delta \nabla u_0) \quad \text{in } \Omega,$$

$$(2.11b) \quad \sigma_0 \frac{\partial u_\delta}{\partial \nu} = -\sigma_\delta \frac{\partial u_0}{\partial \nu} \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

$$(2.11c) \quad \int_{\partial\Omega} u_\delta ds = 0.$$

Bew. Für u_δ haben wir die Darstellung

$$\begin{aligned} u_\delta &= -S(\sigma_0)^{-1} \circ S(\sigma_\delta) \circ S(\sigma_0)^{-1} \circ \mathcal{L}(\mathbb{1}_\Omega, I) \\ &= -S(\sigma_0)^{-1} \circ S(\sigma_\delta)(u_0). \end{aligned}$$

Nach der Definition (2.7) von S gilt für alle $v \in H_*^1(\Omega)$

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_0 \langle \nabla u_\delta, \nabla v \rangle dx &= - \int_{\Omega} \langle \nabla(S(\sigma_\delta)(u_0)), \nabla v \rangle dx \\ &= - \int_{\Omega} \sigma_\delta \langle \nabla u_0, \nabla v \rangle dx. \end{aligned}$$

Wiederum ist unmittelbar klar, daß diese Gleichung sogar für alle $v \in H^1(\Omega)$ gilt. Nach (2.1) ist $\text{div}(\sigma_\delta \nabla u_0) \in H^{-1}(\Omega) = H^1(\Omega)^*$ gegeben durch

$$\int_{\Omega} \text{div}(\sigma_\delta \nabla u_0) \cdot v dx = \int_{\partial\Omega} \sigma_\delta \frac{\partial u_0}{\partial \nu} \cdot v ds - \int_{\Omega} \sigma_\delta \langle \nabla u_0, \nabla v \rangle dx.$$

An (2.2') liest man jetzt ab, daß (2.12) die schwache Form von (2.11) ist. \square

2.3 Reziprozität und Sensitivitätssatz

Aus den in den vorherigen Abschnitten gewonnenen Darstellung für die Lösung von (1.1) und ihre Ableitung nach σ lassen sich zwei wichtige Formeln herleiten. Wir werden ihre Bedeutung kurz erläutern.

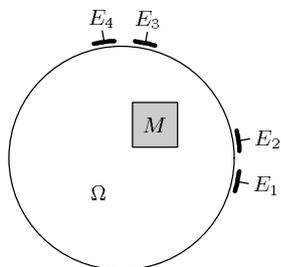
Man sieht an der schwachen Formulierung (2.2) leicht, daß $\Lambda(\sigma)$ selbstadjungiert bezüglich der dualen Paarung zwischen $H_*^{-1/2}(\partial\Omega)$ und $H_*^{1/2}(\partial\Omega)$ ist, das heißt für $I, J \in H_*^{-1/2}(\partial\Omega)$, $\sigma \in L_{>0}^\infty(\Omega)$ ist

$$(2.13) \quad \int_{\partial\Omega} (\Lambda(\sigma)I) \cdot J \, ds = \int_{\partial\Omega} I \cdot (\Lambda(\sigma)J) \, ds.$$

Für die Ableitung gilt die folgende Formel. Es seien $\sigma_0 \in L_{>0}^\infty(\Omega)$, $\sigma_\delta \in L^\infty(\Omega)$, $I, J \in H_*^{-1/2}(\partial\Omega)$ und $u_I := \mathcal{L}(\sigma_0; I)$, $u_J := \mathcal{L}(\sigma_0; J)$. Ferner sei $u_\delta := -S(\sigma_0)^{-1} \circ S(\sigma_\delta)u_I$, so daß $u_\delta|_{\partial\Omega} = ((D\Lambda(\sigma_0)(\sigma_\delta))(I)$. Dann folgt aus (2.2) und (2.12)

$$(2.14) \quad \int_{\partial\Omega} u_\delta \cdot J \, ds = \int_{\Omega} \sigma_0 \langle \nabla u_\delta, \nabla u_J \rangle \, dx = - \int_{\Omega} \sigma_\delta \langle \nabla u_I, \nabla u_J \rangle \, dx.$$

Diese Formel wurde erstmals in [15] hergeleitet. In diesem Text findet man allerdings keinen mathematisch exakten Beweis für die Differenzierbarkeit des Potentials.



In der Praxis erfolgt die Stromeinspeisung und Spannungsmessung über Elektroden. Die letzten beiden Formeln besitzen in diesem Zusammenhang besondere Interpretationen. Am Rand $\partial\Omega$ seien zwei Elektrodenpaare angebracht. E_1, E_2 und E_3, E_4 seien die von den Elektroden eingenommen Gebiete auf $\partial\Omega$. Wir nehmen an, daß die Oberflächen aller Elektroden dieselbe Größe $|E|$ haben. Man darf idealisierend annehmen, daß die Stromstärke über die Oberflächen der einspeisenden Elektroden konstant ist, und die an einem Elektrodenpaar gemessene Spannung die Differenz der Mittelwerte des Potentials über die beiden Elektrodenoberflächen ist. Wird zwischen E_1, E_2 ein Strom eingespeist und zwischen E_3, E_4 Spannung gemessen, so heißt dies in Formeln

$$\begin{aligned} I_{E_1, E_2} &= \frac{I_0}{|E|} (\chi_{E_1} - \chi_{E_2}) \quad (I_0 \in \mathbb{R}, I_0 > 0 \text{ die Gesamtstromstärke}), \\ V_{E_3, E_4}(\sigma) &= \frac{1}{|E|} \left(\int_{E_3} \Lambda(\sigma)(I_{E_1, E_2}) \, ds - \int_{E_4} \Lambda(\sigma)(I_{E_1, E_2}) \, ds \right) \\ &= \frac{1}{I_0} \int_{\partial\Omega} \Lambda(\sigma)(I_{E_1, E_2}) I_{E_3, E_4} \, ds. \end{aligned}$$

Die Gleichung (2.13) besagt also, daß wir dieselbe Spannung erhalten, wenn wir zwischen E_3 , E_4 einspeisen und zwischen E_1 und E_2 messen. Daher bezeichnet man die Formel (2.13) in der Literatur als Reziprozitätsgesetz.

Ist $M \subset \Omega$ eine abgeschlossene Menge in Ω , so erhält man nach demselben Prinzip für die in Richtung χ_M abgeleitete Spannung aus (2.14)

$$\frac{d}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} V_{E_3, E_4}(\sigma + \lambda \chi_M) = - \int_M \langle \nabla u_{E_1, E_2}, \nabla u_{E_3, E_4} \rangle dx,$$

hierbei sind $u_{E_1, E_2} := \mathcal{L}(\sigma; I_{E_1, E_2})$ und $u_{E_3, E_4} := \mathcal{L}(\sigma; I_{E_3, E_4})$. Diskretisiert man die Gleichung (1.1) durch die Finite-Elemente-Methode und ist die Leitfähigkeit auf jedem Element konstant, so läßt sich diese Formel zur effizienten Berechnung der Ableitung der Spannungen nach den Leitfähigkeitswerten verwenden.

3 Das direkte Problem bei stückweise konstanter Leitfähigkeit

In diesem Abschnitt betrachten wir das direkte Problem, wenn die Leitfähigkeit stückweise konstant ist. Um die Darstellung zu vereinfachen, werden wir stets annehmen, daß in Ω nur ein einziges brechendes Hindernis vorhanden ist. Eventuelle Erweiterungen der erzielten Ergebnisse auf mehrere brechende Gebiete werden jeweils gesondert erwähnt.

Wir beginnen wiederum mit dem Beweis der Existenz und Eindeutigkeit für das direkte Problem. Eine stückweise konstante Leitfähigkeit liegt in $L^\infty_0(\Omega)$, so daß Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung aus Satz 2.2 folgt. Es wird gezeigt, daß die schwache Formulierung (2.2) äquivalent zu einem Transmissionsproblem für den Laplace-Operator ist. Dadurch erhalten wir

$$\Lambda(\sigma; (C_\star(\partial\Omega)) \subset C_\star(\partial\Omega)$$

und die Stetigkeit von

$$\Lambda(\sigma; \cdot)|_{C_\star(\partial\Omega)} : C_\star(\partial\Omega) \rightarrow C_\star(\partial\Omega).$$

Durch die Beschränkung auf die stückweise konstanten Leitfähigkeiten läßt sich die Neumann-Dirichlet-Abbildung als Funktion von dem brechenden Gebiet und seiner Leitfähigkeit auffassen. Wir beweisen die Differenzierbarkeit von Λ in Abhängigkeit von diesen beiden Variablen. Im Gegensatz zu dem Differenzierbarkeitsergebnis des vorherigen Abschnitts legen wir hierbei $\text{Hom}(C_\star(\partial\Omega), C_\star(\partial\Omega))$ als Bildraum von Λ zugrunde.

3.1 Existenz und Eindeutigkeit des direkten Problems

Wir benötigen einige Bezeichnungen. Ist $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, C^2 -glatt berandet, so sei $\mathcal{R}(G)$ der Raum der reelwertigen Funktionen in $C^2(G) \cap C(\bar{G})$ für die

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) := \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \langle \nu(x), \nabla u(x - h\nu(x)) \rangle, \quad x \in \partial G,$$

gleichmäßig auf ∂G konvergiert. Dabei ist ν die nach außen weisende Einheitsnormale. Es ist leicht zu sehen, daß für $u, v \in \mathcal{R}(G)$ und beschränktes G die beiden Greenschen Sätze gültig sind. Es sei

$$\Phi(x, y) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln |x - y|, & n = 2 \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} |x - y|^{2-n}, & n \geq 3 \end{cases}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, x \neq y,$$

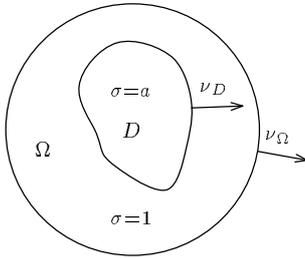
(ω_n die Oberfläche der n -dimensionalen Einheitskugel) die Fundamentallösung des Laplace-Operators. Ist G beschränkt, so definieren wir für $\varphi \in C(\partial G)$ die

Randintegraloperatoren

$$\begin{aligned}
(S\varphi)(x) &:= 2 \int_{\partial G} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y), & x \in \mathbb{R}^n, \\
(K\varphi)(x) &= 2 \int_{\partial G} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_y}(x, y) \varphi(y) ds(y), & x \in \mathbb{R}^n, \\
(K^*\varphi)(x) &:= 2 \int_{\partial G} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_x}(x, y) \varphi(y) ds(y), & x \in \partial G.
\end{aligned}$$

Die Notationen $\partial \nu_x$, $\partial \nu_y$ sollen hierbei andeuten, daß die äußere Normalenableitung bezüglich der ersten beziehungsweise zweiten Variablen genommen wird. Operieren wir mit mehreren Gebieten, so benutzen wir die Bezeichnungen S_G , K_G , und K_G^* um Uneindeutigkeiten zu vermeiden. Die grundlegenden Eigenschaften dieser Integraloperatoren findet man zum Beispiel in [7]. Für stetige Dichte φ ist $(S\varphi)|_G \in \mathcal{R}(G)$ und $(S\varphi)|_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{G}} \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n \setminus \bar{G})$.

Es seien $\Omega, D \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, zusammenhängend, C^2 -glatt berandet mit $\bar{D} \subset \Omega$. Ist u eine Funktion auf Ω für die stetige Randwerte oder Ableitungen auf ∂D nur einseitig existieren, so benutzen wir die Bezeichnungen u_+ und u_- für $u|_{\Omega \setminus \bar{D}}$ beziehungsweise $u|_D$ um festzulegen, von welcher Seite die Werte genommen werden.



Man entnimmt der Gleichung (1.1), daß sich das Potential um den Faktor $1/c$ ändert, wenn die Leitfähigkeit mit $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ multipliziert wird. Es bedeutet daher im weiteren Text keine wesentliche Einschränkung, wenn wir annehmen, daß die Hintergrundleitfähigkeit auf 1 normiert ist. Wir betrachten jetzt den Fall, daß die Leitfähigkeit σ in (1.1) durch

$$(3.1) \quad \sigma = \chi_{\bar{\Omega} \setminus D} + a \cdot \chi_D, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0,$$

gegeben ist.

Es wird sich zeigen, daß (2.2) sich zu einem Transmissionsproblem für den Laplace-Operator umformulieren läßt. Wir erweitern die Notation von \mathcal{R} , indem wir $\mathcal{R}(\Omega; D)$ als Raum aller Funktionen $u \in C^2(\Omega \setminus \partial D) \cap C(\bar{\Omega})$ mit $u_+ \in \mathcal{R}(\Omega \setminus \bar{D})$, $u_- \in \mathcal{R}(D)$ definieren.

Sind $u, v \in \mathcal{R}(\Omega; D)$ und ist u auf $\Omega \setminus \partial D$ harmonisch, so folgt aus dem 1. Greenschen Satz

$$\begin{aligned}
(3.2) \quad \int_{\Omega} \sigma \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx &= \int_{\Omega \setminus \bar{D}} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx + a \int_D \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx \\
&= \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v ds - \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u_+}{\partial \nu} - a \frac{\partial u_-}{\partial \nu} \right\} v ds.
\end{aligned}$$

Durch Vergleich mit der schwachen Formulierung (2.2)

$$\text{Finde } u \in H_*^1(\Omega) \text{ mit } \forall v \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} \sigma \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx = \int_{\partial\Omega} I \cdot v ds$$

der Differentialgleichung (1.1) erhält man jetzt $\partial u_+ / \partial \nu - a \partial u_- / \partial \nu = 0$ als geeignete Randbedingung auf ∂D . Bei dem Beweis der Existenz und Eindeutigkeit des direkten Problems bereitet es keine zusätzlichen Schwierigkeiten, in dieser Gleichung eine Inhomogenität zuzulassen.

Wir betrachten das folgende Transmissionsproblem. Zu $I \in C(\partial\Omega)$, $\mu \in C(\partial D)$ finde ein Potential u mit

$$(3.3a) \quad u \in \mathcal{R}(\Omega; D),$$

$$(3.3b) \quad \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega \setminus \partial D,$$

$$(3.3c) \quad \frac{\partial u_+}{\partial \nu} - a \frac{\partial u_-}{\partial \nu} = \mu \quad \text{auf } \partial D,$$

$$(3.3d) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = I \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

$$(3.3e) \quad \int_{\partial\Omega} u ds = 0.$$

Ist u eine Lösung von (3.3), so folgt aus (3.2) für $v \in \mathcal{R}(\Omega; D)$

$$(3.4) \quad \int_{\Omega \setminus \bar{D}} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx + a \int_D \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx = \int_{\partial\Omega} I \cdot v ds - \int_{\partial D} \mu \cdot v ds.$$

Satz 3.1. *Es sei u eine Lösung von (3.3) für $a > 0$, $I \in C(\partial\Omega)$ und $\mu = 0$ auf ∂D . Ist dann $\sigma \in L_{>0}^\infty(\Omega)$ definiert durch (3.1), so ist $u = \mathcal{L}(\sigma; I)$, das heißt u ist die Lösung von (2.2)*

Bew. Im wesentlichen ist $u \in H^1(\Omega)$ nachzuweisen. Setzt man in (3.4) $v = u$, so folgt $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx < \infty$. Die bis auf die Nullmenge ∂D definierten partiellen Ableitungen von u liegen daher in $L^2(\Omega)$. Für $v \in C_0^\infty(\Omega)$ folgt durch partielle Integration

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v \nabla u dx &= \int_{\Omega \setminus \bar{D}} v \nabla u dx + \int_D v \nabla u dx \\ &= - \int_{\partial D} v u_+ \nu ds - \int_{\Omega \setminus \bar{D}} u \nabla v dx + \int_{\partial D} v u_- \nu ds - \int_D u \nabla v dx \\ &= - \int_{\Omega} u \nabla v dx, \end{aligned}$$

wegen $u_+ = u_-$ auf ∂D . Die Funktionen $\partial u / \partial x_i$, $i = 1, \dots, n$ stimmen daher mit den im distributiven Sinne verallgemeinerten partiellen Ableitungen von u überein. Eine Lösung von (3.3) liegt daher in $H^1(\Omega)$. Weil $\mathcal{R}(\Omega; D)$ dicht in $H^1(\Omega)$ liegt, folgt die Behauptung aus (3.4). \square

Satz 3.2. Das Problem (3.3) ist genau dann lösbar, wenn

$$(3.5) \quad \int_{\partial\Omega} I ds = \int_{\partial D} \mu ds$$

gilt. Die Lösungsabbildung

$$\{(I, \mu) \in C(\partial\Omega) \times C(\partial D) : \int_{\partial\Omega} I ds = \int_{\partial D} \mu ds\} \rightarrow C(\bar{\Omega}), \quad (I, \mu) \mapsto u$$

ist linear und stetig.

Bew. Ist u eine Lösung des homogenen Problems $I = 0, \mu = 0$, so folgt $\nabla u = 0$ aus (3.4). Wegen (3.3e) ist dann sogar $u = 0$. Es existiert also höchstens eine Lösung. Die Notwendigkeit von (3.5) folgt ebenfalls aus (3.4), indem man $v = \mathbb{1}_{\bar{\Omega}}$ setzt.

Wir machen für u einen Ansatz als Einzelschichtpotential

$$(3.6) \quad u = S_{\Omega}\psi_{\Omega} + S_D\psi_D, \quad \psi_{\Omega} \in C(\partial\Omega), \psi_D \in C(\partial D).$$

Dann erfüllt u (3.3a) und (3.3b). Aus den Sprungbeziehungen der Einzelschichtpotentiale erhält man für die Normalenableitungen von u

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \nu} &= \psi_{\Omega} + K_{\Omega}^* \psi_{\Omega} + \frac{\partial}{\partial \nu_{\Omega}} S_D \psi_D && \text{auf } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u_+}{\partial \nu} &= -\psi_D + \frac{\partial}{\partial \nu} S_{\Omega} \psi_{\Omega} + K_D^* \psi_D && \text{auf } \partial D, \\ a \frac{\partial u_-}{\partial \nu} &= a(\psi_D + \frac{\partial}{\partial \nu} S_{\Omega} \psi_{\Omega} + K_D^* \psi_D) && \text{auf } \partial D. \end{aligned}$$

Daher erfüllt u die Gleichungen (3.3c), (3.3d), falls die Dichten das Gleichungssystem

$$(3.7) \quad \left\{ \text{Id}_{C(\partial\Omega) \times C(\partial D)} + \begin{pmatrix} K_{\Omega}^* & \frac{\partial}{\partial \nu_{\Omega}} S_D \\ c \frac{\partial}{\partial \nu_D} S_{\Omega} & c K_D^* \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \psi_{\Omega} \\ \psi_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ -\frac{\mu}{1+a} \end{pmatrix},$$

auf dem Rand $\partial\Omega \cup \partial D$ lösen, wobei $c := \frac{a-1}{a+1}$ definiert ist. Versieht man $C(\partial\Omega)$ und $C(\partial D)$ mit den von $L^2(\partial\Omega)$ beziehungsweise $L^2(\partial D)$ induzierten Bilinearformen, so sind die zu $\frac{\partial}{\partial \nu_D} S_{\Omega}$ und $\frac{\partial}{\partial \nu_{\Omega}} S_D$ adjungierten Operatoren durch

$$(3.8) \quad K_{\partial D \rightarrow \partial\Omega}(\varphi_D) := (K_D \varphi_D)|_{\partial\Omega}, \quad \varphi_D \in C(\partial D),$$

$$(3.9) \quad \text{und } K_{\partial\Omega \rightarrow \partial D}(\varphi_{\Omega}) := (K_{\Omega} \varphi_{\Omega})|_{\partial D}, \quad \varphi_{\Omega} \in C(\partial\Omega),$$

gegeben. Setzt man

$$(3.10) \quad \mathbf{K}_a^* := \begin{pmatrix} K_{\Omega}^* & \frac{\partial}{\partial \nu_{\Omega}} S_D \\ c \frac{\partial}{\partial \nu_D} S_{\Omega} & c K_D^* \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{K}_a = \begin{pmatrix} K_{\Omega} & c K_{\partial D \rightarrow \partial\Omega} \\ K_{\partial\Omega \rightarrow \partial D} & c K_D \end{pmatrix},$$

so sind \mathbf{K}_a^* , \mathbf{K}_a auf $C(\partial\Omega \cup \partial D) \simeq C(\partial\Omega) \times C(\partial D)$ kompakte und bezüglich der von $L^2(\partial\Omega \cup \partial D)$ induzierten Bilinearform zueinander adjungierte Operatoren. Wir behaupten

$$(3.11) \quad \text{Ker}(\text{Id}_{C(\partial\Omega) \times C(\partial D)} + \mathbf{K}_a^*) = \text{Ker}(\text{Id}_{C(\partial\Omega)} + K_\Omega^*) \times \{0\}.$$

Ist nämlich $(\psi_\Omega, \psi_D)^T \in \text{Ker}(\text{Id} + \mathbf{K}_a^*)$, so ist das Potential $v := S_\Omega \psi_\Omega + S_D \psi_D$ nach Konstruktion eine Lösung des homogenen Problems (3.3a)–(3.3d). Nach dem bereits bewiesenen Eindeigkeitsteil ist daher v in Ω konstant. Aus den Sprungbeziehungen folgt $\psi_D = 0$, und aus der ersten Zeile der Gleichung (3.7) liest man jetzt $\psi_\Omega \in \text{Ker}(\text{Id} + K_\Omega^*)$ ab. Ist andererseits $\psi_\Omega \in \text{Ker}(\text{Id} + K_\Omega^*)$, so folgt aus den Sprungbeziehungen, daß $S_\Omega \psi_\Omega$ eine Lösung des homogenen inneren Neumann-Problems zum Laplace-Operators in Ω ist. Also ist $S_\Omega \psi_\Omega$ konstant und $\frac{\partial}{\partial \nu_D} S_\Omega \psi_\Omega = 0$, $(\text{Id} + \mathbf{K}_a^*)(\psi_\Omega, 0)^T = 0$. Somit ist (3.11) gezeigt.

Der Kern von $\text{Id}_{C(\partial\Omega)} + K_\Omega^*$ ist eindimensional (siehe [23], Theorem 6.16) und aus (3.11) und dem 1. Fredholmschen Satz folgt daher

$$(3.12) \quad \dim(\text{Ker}(\text{Id} + \mathbf{K}_a^*)) = \dim(\text{Ker}(\text{Id} + \mathbf{K}_a)) = 1.$$

Ist $G \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes, beschränktes Gebiet mit C^2 -glattem Rand, so gilt für das Doppelschichtpotential mit konstanter Dichte (siehe [23], Example 6.14)

$$(K_G \mathbb{1}_{\partial G})(x) = \begin{cases} -2, & x \in G, \\ -1, & x \in \partial G, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{G}. \end{cases}$$

Jetzt ist

$$(3.13) \quad \text{Ker}(\text{Id} + \mathbf{K}_a) = \mathbb{R} \cdot (\mathbb{1}_{\partial\Omega}, (a+1) \cdot \mathbb{1}_{\partial D})^T$$

leicht nachzurechnen. Aus dem Fredholmschen Alternativsatz folgt, daß (3.7) genau dann lösbar ist, wenn $(I, -\mu/(a+1))^T \in \text{Ker}(\text{Id} + \mathbf{K}_a)^\perp$ gilt, und das bedeutet $\int_{\partial\Omega} I ds = \int_{\partial D} \mu ds$. Ist $(\psi_\Omega, \psi_D)^T$ eine Lösung von (3.7) und normieren wir das zugehörige Potential $u = S_\Omega \psi_\Omega + S_D \psi_D$ gemäß (3.3e) durch Addition einer Konstanten, so erhalten wir eine Lösung von (3.3).

Um schließlich die Stetigkeit zu beweisen, ist $\text{Ker}(\text{Id} + \mathbf{K}_a^*) \neq \text{Ker}(\text{Id} + \mathbf{K}_a)$ zu zeigen. Aus der Riesz-Fredholm-Theorie folgt dann nämlich, daß die Einschränkung von $\text{Id} + \mathbf{K}_a^*$ auf $\text{Bild}(\text{Id} + \mathbf{K}_a^*) = \text{Ker}(\text{Id} + \mathbf{K}_a)^\perp$ stetig invertierbar ist. Wegen (3.11) und (3.13) ist dies gleichbedeutend mit $\text{Ker}(\text{Id} + K_\Omega^*) \neq \mathbb{1}_{\partial\Omega}$. Für einen Beweis dieser Aussage verweisen wir wieder auf [23], Theorem 6.16. \square

Der in (2.8) definierte Lösungsoperator läßt sich daher als Abbildung auffassen, die der inneren Leitfähigkeit a und dem Gebiet D den Operator

$$(3.14) \quad \mathcal{L}(\chi_{\bar{\Omega} \setminus D} + a\chi_D; \cdot) \in \text{Hom}(C_*(\partial\Omega), C_*(\bar{\Omega}))$$

zuordnet.

Das Potential $u = \mathcal{L}(\chi_{\bar{\Omega} \setminus D} + a\chi_D; I)$ läßt sich in das ungebrochene Potential $u_I := \mathcal{L}(\mathbb{1}_{\bar{\Omega}}; I)$ und das gebrochene Potential $u_b := u - u_I$ aufspalten. Das Potential u_b erfüllt dann (3.3) mit $I = 0$, $\mu = (a - 1)\partial u_I / \partial \nu$. Dies läßt sich benutzen, um Potentiale für Dipoleinspeisungen oder Einspeisungen in endlich vielen Punkten zu definieren, für die u_I in Ω analytisch ist, aber die Neumanndaten nicht in $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ liegen.

Die Beweise der Sätze 3.1, 3.2 übertragen sich ohne Probleme auf den Fall, daß Ω endlich viele brechende Gebiete D_1, \dots, D_n mit $\partial D_j \cap \partial D_k = \emptyset$, $\bar{D}_j \subset \Omega$, $j, k = 1, \dots, n$ enthält. Die Transmissionsbedingung (3.3c) ist entsprechend anzupassen, falls nicht einfach zusammenhängende D_j zugelassen sind. Ist die Leitfähigkeit zum Beispiel von der Form

$$\sigma = \chi_{\bar{\Omega} \setminus D_1} + a_1 \chi_{\bar{D}_1 \setminus D_2} + a_2 \chi_{D_2}, \quad \bar{D}_2 \subset D_1, \quad a_1, a_2 > 0,$$

so ist die Transmissionsbedingung (3.3c) auf ∂D_2 in Satz 3.1 durch

$$a_1 \frac{\partial(u|_{D_1 \setminus D_2})}{\partial \nu} - a_2 \frac{\partial(u|_{D_2})}{\partial \nu} = 0$$

zu ersetzen.

3.2 Die Ableitung nach der inneren Leitfähigkeit

In diesem Abschnitt beweisen wir, daß bei fest gewähltem $D \subset \Omega$ die Abbildung

$$(3.15) \quad (0, \infty) \rightarrow \text{Hom}(C_*(\partial\Omega), C_*(\bar{\Omega})), \quad a \mapsto \mathcal{L}(\chi_{\bar{\Omega} \setminus D} + a\chi_D; \cdot),$$

differenzierbar ist, und charakterisieren die Ableitung als Lösungsoperator eines Problems mit inhomogener Transmissionsbedingung auf ∂D . Daraus folgt natürlich unmittelbar die Differenzierbarkeit der Neumann-Dirichlet-Abbildung in Abhängigkeit von a .

Legt man statt den stetigen Funktionen die Sobolev-Räume zugrunde, betrachtet also

$$(0, \infty) \rightarrow \text{Hom}(H_*^{-1/2}(\partial\Omega), H_*^1(\Omega)), \quad a \mapsto \mathcal{L}(\chi_{\bar{\Omega} \setminus D} + a\chi_D; \cdot),$$

so ist die entsprechende Aussage lediglich ein Spezialfall von Satz 2.3.

Satz 3.3. *Die Abbildung (3.15) ist differenzierbar. Ist $I \in C_*(\partial\Omega)$ und $u := \mathcal{L}(\chi_{\bar{\Omega} \setminus D} + a\chi_D; I)$, so ist das abgeleitete Potential*

$$u' := \left. \frac{d}{d\lambda} \right|_{\lambda=a} \mathcal{L}(\chi_{\bar{\Omega} \setminus D} + \lambda\chi_D; I)$$

die Lösung von

$$(3.16a) \quad u' \in \mathcal{R}(\Omega; D),$$

$$(3.16b) \quad \Delta u' = 0 \quad \text{in } \Omega \setminus \partial D,$$

$$(3.16c) \quad \frac{\partial u'_+}{\partial \nu} - a \frac{\partial u'_-}{\partial \nu} = \frac{\partial u_-}{\partial \nu} \quad \text{auf } \partial D,$$

$$(3.16d) \quad \frac{\partial u'}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

$$(3.16e) \quad \int_{\partial\Omega} u' ds = 0.$$

Bew. In Beweis von Satz 3.2 hatten wir gesehen, daß u bis auf die Normierung gegeben ist durch $S_\Omega \psi_\Omega + S_D \psi_D$ mit $\psi_\Omega \in C(\partial\Omega)$, $\psi_D \in C(\partial D)$, $(\psi_\Omega, \psi_D)^T \in \text{Bild}(\text{Id} + \mathbf{K}_a^*)$ die Lösung von

$$(3.17) \quad (\text{Id} + \mathbf{K}_a^*)(\psi_\Omega, \psi_D)^T = (I, 0)^T.$$

Aus der Definition (3.10) ist sofort ersichtlich, daß \mathbf{K}_a^* differenzierbar von a abhängt. Also hängen auch die Dichten ψ_Ω , ψ_D differenzierbar von a ab. Die Differenzierbarkeit folgt jetzt aus der Stetigkeit der Einzelschichtpotentialoperatoren $S_\Omega, S_D : \partial\Omega, \partial D \rightarrow \mathbb{R}^2$. Bezeichnen wir mit $(\psi'_\Omega, \psi'_D)^T$ die Ableitung von $(\psi_\Omega, \psi_D)^T$ bei a , so lösen diese das System

$$(\text{Id} + \mathbf{K}_a^*)(\psi'_\Omega, \psi'_D)^T = -\left(\left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=a} \mathbf{K}_\lambda^*\right)(\psi_\Omega, \psi_D)^T$$

$$(3.18) \quad = -(0, c' \frac{\partial}{\partial \nu_D} S_\Omega \psi_\Omega + c' K_D^* \psi_D)^T,$$

mit $c' = \frac{2}{(1+a)^2}$. Wir betrachten zunächst den Fall $a \neq 1$. Dann ist $c \neq 0$ und aus (3.17) erhalten auf ∂D

$$\frac{\partial}{\partial \nu_D} S_\Omega \psi_\Omega + K_D^* \psi_D = -\frac{1}{c} \psi_D.$$

Dies eingesetzt in (3.18) ergibt

$$(3.19) \quad (\text{Id} + \mathbf{K}_a^*)(\psi'_\Omega, \psi'_D)^T = (0, \frac{c'}{c} \psi_D)^T, \quad a \neq 1.$$

Definiert man

$$\tilde{u} := S_\Omega \psi_\Omega + S_D \psi_D,$$

so ist nach dem Beweis von Satz 3.2

$$u = \tilde{u} - \frac{1}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} \tilde{u} \, ds.$$

Das abgeleitete Potential ist daher bis auf eine Konstante durch $S_\Omega \psi'_\Omega + S_D \psi'_D$ gegeben. Durch Vergleich von (3.19) mit (3.7) erhalten wir für u' die Randwerte

$$(3.20) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial \nu} &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u'_+}{\partial \nu} - a \frac{\partial u'_-}{\partial \nu} &= -\frac{2}{a-1} \psi_D && \text{auf } \partial D. \end{aligned}$$

Benutzt man die Sprungbeziehungen und (3.3c), so ergibt sich auf ∂D

$$-2\psi_D = \frac{\partial u_+}{\partial \nu} - \frac{\partial u_-}{\partial \nu} = a \frac{\partial u_-}{\partial \nu} - \frac{\partial u_-}{\partial \nu} = (a-1) \frac{\partial u_-}{\partial \nu}.$$

Das zeigt die Behauptung für $a \neq 1$.

Ist $a = 1$ und folglich $c = 0$, so ist $\psi_D = 0$ aus (3.7) unmittelbar abzulesen. Für die Normalableitungen auf ∂D erhalten wir aus (3.18) mit $c' = 1/2$ die Werte

$$\frac{\partial u'_+}{\partial \nu} - \frac{\partial u'_-}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial \nu} S_\Omega \psi_\Omega = \frac{\partial u_I}{\partial \nu}.$$

Hier ist $u_I = \mathcal{L}(\mathbb{1}_\Omega; I)$ das Potential bei homogener Leitfähigkeit zur Einspeisung I . Das ist die Behauptung für $a = 1$. \square

Definiert man für ein festes $I \in C_*(\partial\Omega)$

$$u'_D := \frac{d}{d\lambda} \Big|_{\lambda=1} \mathcal{L}(\chi_{\Omega \setminus D} + \lambda \chi_D; I), \quad u_{D,a} := \mathcal{L}(\chi_{\Omega \setminus D} + a \chi_D; I),$$

so hat man für a nahe bei 1 die Approximation

$$(3.21) \quad u_{D,a} \approx u_I + (a-1)u'_D.$$

Das Potential u'_D besitzt eine besonders einfache Darstellung durch die Greensche Funktion G des Laplace-Operators zum Neumann-Problem in Ω . Diese Funktion ist durch die folgenden Eigenschaften definiert.

$$(3.22a) \quad \Delta_x G(x, y) = -\delta(x - y), \quad y \in \Omega,$$

$$(3.22b) \quad \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x, y) = -\frac{1}{|\partial\Omega|}, \quad y \in \Omega, x \in \partial\Omega,$$

$$(3.22c) \quad \int_{\partial\Omega} G(x, y) ds(x) = 0, \quad y \in \Omega.$$

In Gleichung (3.22a) bezeichnet δ die Diracsche Delta-Distribution. Es existiert eine in $\Omega \times \Omega$ analytische Funktion H mit $G(x, y) = \Phi(x, y) + H(x, y)$. Insbesondere genügt ein Einzelschichtpotential mit Kern G über ∂D den gleichen Sprungbeziehungen wie das Einzelschichtpotential mit Kern Φ . Die Gleichung (3.16c) für u'_D auf ∂D lautet

$$(3.16c') \quad \frac{\partial(u'_D)_+}{\partial \nu} - \frac{\partial(u'_D)_-}{\partial \nu} = \frac{\partial u_I}{\partial \nu}, \quad u_I = \mathcal{L}(\mathbb{1}_{\bar{\Omega}}; I).$$

Aus den Sprungbeziehungen und (3.22) liest man jetzt für u' die Darstellung

$$(3.23) \quad u'_D(x) := - \int_{\partial D} G(x, y) \frac{\partial u_I}{\partial \nu}(y) ds(y), \quad x \in \bar{\Omega}.$$

ab. Mit dem Greenschen Satz folgt daraus

$$(3.24) \quad u'_D(x) = - \int_D \langle \nabla_y G(x, y), \nabla u_I(y) \rangle dy, \quad x \in \bar{\Omega} \setminus \bar{D}.$$

Diese letzte Gleichung wird auch durch die Formel (2.14) von Geselowitz mit

$$J(x) = \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x, y), \quad u_J(x) = G(x, y) \quad \text{und} \quad \sigma_\delta = \chi_D$$

nahegelegt. Wegen $\partial G / \partial \nu_x(\cdot, y) \notin H^{-1/2}(\partial\Omega)$, $y \in \partial\Omega$ ist die direkte Herleitung aus (2.14) allerdings nicht gerechtfertigt.

Ist die Greensche Funktion auf Ω bekannt, so kann man Gleichung (3.23) benutzen, um u'_D zu berechnen, ohne daß dabei ein Gleichungssystem auf dem Rand zu lösen ist. Daher ist u'_D wesentlich leichter numerisch zu berechnen als $u_{D,a}$. Bei der Betrachtung des inversen Problems werden sich auch theoretische Vereinfachungen ergeben, wenn wir $u_{D,a}$ durch $u_I + (a-1)u'_D$ ersetzen. Wir definieren daher ein Symbol für den Lösungsoperator von (3.16).

$$(3.25) \quad \mathcal{L}_h(D; I) := \frac{d}{d\lambda} \Big|_{\lambda=1} \mathcal{L}(\chi_{\bar{\Omega} \setminus D} + \lambda \chi_D; I), \quad I \in C_*(\partial\Omega).$$

3.3 Die Gebietsableitung

Ähnlich wie im vorherigen Abschnitt die Ableitung des Potentials $\mathcal{L}(\chi_{\bar{\Omega} \setminus D} + a\chi_D; I)$, $I \in C_*(\partial\Omega)$ nach a als Lösung eines Randwertproblems charakterisiert wurde, soll dies jetzt mit der Ableitung nach dem Gebiet D geschehen.

Wir werden später benötigen, daß sich die zweiten Ableitungen der Lösung des direkten Problems von beiden Seiten stetig auf den Rand ∂D fortsetzen lassen, und müssen hierfür etwas stärkere Glattheit von ∂D verlangen. Es sei $D \subset \Omega$ offen, zusammenhängend mit $\bar{D} \subset \Omega$ und $C^{2,\alpha}$ -glattem Rand, $0 < \alpha < 1$. Für $I \in C_*(\partial\Omega)$, $u := \mathcal{L}(\chi_{\bar{\Omega} \setminus D} + a\chi_D; I)$ sind dann die zweiten partiellen Ableitungen von u α -hölderstetig auf ∂D forsetzbar. Dies folgt leicht aus (3.7) (mit $\mu = 0$) und den Abbildungseigenschaften

$$\begin{aligned} S_D(C^{1,\alpha}(\partial D))|_D &\subset C^{2,\alpha}(\bar{D}), & S_D(C^{1,\alpha}(\partial D))|_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{D}} &\subset C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n \setminus D) \\ K_D^*(C^{1,\alpha}(\partial D)) &\subset C^{1,\alpha}(\partial D), \end{aligned}$$

der beteiligten Integraloperatoren (siehe [21]).

Um Fréchet-Differenzierbarkeit in Abhängigkeit von dem Gebiet zu definieren, benötigt man lokal eine lineare Struktur auf der Menge der $C^{2,\alpha}$ -glatte Gebiete. Hierzu wird der Raum der Vektorfelder auf ∂D verwendet. Es sei $\mathfrak{E}^{2,\alpha}(\partial D)$ der Banachraum aller $C^{2,\alpha}$ -glatte Vektorfelder auf ∂D . Für Z aus einer hinreichend kleinen Umgebung U der Null in $\mathfrak{E}^{2,\alpha}(\partial D)$ ist

$$\partial D + Z := \{x + Z(x) : x \in \partial D\}$$

wieder der $C^{2,\alpha}$ -glatte Rand eines zusammenhängenden Gebietes D_Z in Ω . Für $a > 0$ erhält man dadurch eine Abbildung

$$(3.26) \quad \begin{aligned} \mathfrak{E}^{2,\alpha}(\partial D) \supset U &\rightarrow \text{Hom}(C_*(\partial\Omega), C_*(\partial\Omega)), \\ Z &\mapsto \Lambda(\chi_{\bar{\Omega} \setminus D_Z} + a\chi_{D_Z}; \cdot). \end{aligned}$$

Mit Fréchet-Differenzierbarkeit des Randpotentials auf $\partial\Omega$ bezüglich des Gebietes D ist die Differenzierbarkeit dieser Abbildung gemeint. Die Abbildung $Z \mapsto D_Z$ wird also ähnlich verwendet, wie die Karten einer Mannigfaltigkeit. Untersucht man die Gebietsableitung auf Injektivität, so hat man zu beachten, daß diese „Karten“ nicht injektiv sind. Das Vektorfeld Z läßt sich zu einem $C^{2,\alpha}$ -glatte Vektorfeld auf \mathbb{R}^n mit kompaktem Träger fortsetzen. Durch Integration dieses Vektorfeldes erhält man einen Fluß $\Psi(x, t)$ mit

$$\Psi(x, 0) = x \quad \text{und} \quad \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Psi(x, t) = Z(x).$$

Die Diffeomorphismen $\Phi_t(x) := \Psi(x, t)$ transformieren die Randkurve also ebenfalls für $t \rightarrow 0$ in Richtung des Vektorfeldes Z . Man kann sich überlegen, daß man daher die Ableitung in Richtung Z auch als

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Lambda(\chi_{\bar{\Omega} \setminus \Phi_t(D)} + a\chi_{\Phi_t(D)}; I)$$

berechnen kann. Ist Z ein tangenciales Feld, so weiß man aus der Analysis, daß die Φ_t den Rand ∂D auf sich selbst abbilden. Dies stützt die Auffassung, daß die tangentialen Vektorfelder im Kern des Differentials $Z \mapsto D_Z$ liegen, auch wenn dieses Differential nicht wirklich definiert ist, da wir auf der Menge der Gebiete keine Mannigfaltigkeitsstruktur haben. Mit der Injektivität des Differentials ist daher die Injektivität im Raum $\mathfrak{C}^{2,\alpha}(\partial D)$ modulo der tangentialen Felder gemeint. Das heißt gerade, daß die Ableitung nicht verschwindet, wenn die Normalenkomponente $\langle Z, \nu \rangle$ nicht verschwindet.

Im vorherigen Abschnitt ist erwähnt worden, daß man ein Differenzierbarkeitsergebnis nach der inneren Leitfähigkeit a herleiten kann, indem man zunächst die Abbildung

$$(3.27) \quad (0, \infty) \times U \rightarrow L_{>0}^\infty(\Omega), \quad (a, Z) \mapsto \chi_{\bar{\Omega} \setminus D_Z} + a\chi_{D_Z}$$

betrachtet, und dann Satz 2.3 anwendet. Ein derartiges Vorgehen ist für die Ableitung nach dem Gebiet nicht möglich. Für $D_Z \neq D$ ist nämlich

$$\|(\chi_{\bar{\Omega} \setminus D} + a\chi_D) - (\chi_{\bar{\Omega} \setminus D_Z} + a\chi_{D_Z})\|_{L^\infty(\Omega)} = |a - 1|.$$

Für $a \neq 1$ ist daher im allgemeinen in $L^\infty(\Omega)$

$$\lim_{Z \rightarrow 0} (\chi_{\bar{\Omega} \setminus D_Z} + a\chi_{D_Z}) \neq \chi_{\bar{\Omega} \setminus D} + a\chi_D.$$

Die Abbildung in (3.27) ist also in der zweiten Variablen nicht stetig und dann erst recht nicht differenzierbar. Wie man ein Differenzierbarkeitsergebnis und die Charakterisierung des nach D abgeleiteten Potentials aus der schwachen Formulierung von (1.1) herleiten kann, findet man in [16] für den allgemeineren Fall der Helmholtzgleichung. In dieser Arbeit wollen wir die in Abschnitt 3.1 dargestellte Randintegralmethode für ein Differenzierbarkeitsergebnis benutzen.

Wir formulieren jetzt das Differenzierbarkeitsergebnis und die Charakterisierung, wie sie aus den Arbeiten [27], [28] von R. Potthast folgen.

Satz 3.4. *Die in (3.26) definierte Abbildung ist Fréchet-differenzierbar. Ist $Z \in \mathfrak{C}^2(\partial D)$, $I \in C_*(\partial\Omega)$, $a > 0$ und $u := \mathcal{L}(\chi_{\bar{\Omega} \setminus D} + \chi_D; I)$, so ist*

$$(3.28) \quad \left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \Lambda(\chi_{\bar{\Omega} \setminus D_{\alpha Z}} + a\chi_{D_{\alpha Z}})(I) = u^*|_{\partial\Omega},$$

dabei ist u^* die eindeutige Lösung des folgenden Transmissionsproblems

$$(3.29a) \quad u_-^* \in C^{1,\alpha}(\bar{D}), \quad u_+^* \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega} \setminus D),$$

$$(3.29b) \quad \Delta u^* = 0 \quad \text{in } \Omega \setminus \partial D,$$

$$(3.29c) \quad u_+^* - u_-^* = -\langle \nabla u_+ - \nabla u_-, Z \rangle \quad \text{auf } \partial D,$$

$$(3.29d) \quad \frac{\partial u_+^*}{\partial \nu} - a \frac{\partial u_-^*}{\partial \nu} = -\langle (\nabla^2 u_+ - a \nabla^2 u_-)(Z), \nu \rangle \\ - \left\langle \nabla u_+ - a \nabla u_-, \frac{\partial \nu}{\partial Z} \right\rangle \quad \text{auf } \partial D,$$

$$(3.29e) \quad \frac{\partial u^*}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } \partial \Omega,$$

$$(3.29f) \quad \int_{\partial \Omega} u^* ds = 0.$$

In (3.29d) bezeichnet $\nabla^2 u_{\pm} = (\partial^2 u_{\pm} / \partial x_i \partial x_j)_{i,j=1,\dots,n}$ die Hessesche Matrix und $\partial \nu / \partial Z$ die Ableitung $d/d\alpha|_{\alpha=0} \nu_{D_{\alpha Z}}$ des äußeren Normalenfeldes.

Die Randwerte des abgeleiteten Potentials erhält man auf heuristischem Weg, indem man die Gleichungen $u_+ - u_- = 0$ und (3.3c), (3.3d) so ableitet, als wäre die Differenzierbarkeit der Cauchy-Randdaten von u_{\pm} sichergestellt. Für eine mathematisch exakte Verifizierung legt man die in Abschnitt 3.1 für $u = \mathcal{L}(\chi_{\bar{\Omega} \setminus D} + a \chi_D; I)$, $I \in C_*(\partial \Omega)$ bewiesene Darstellung

$$(3.30) \quad u = \tilde{u} - \frac{1}{|\partial \Omega|} \int_{\partial \Omega} \tilde{u} dx \quad \text{mit} \quad \tilde{u} = S_{\Omega} \psi_{\Omega} + S_D \psi_D \\ \text{und} \quad (\text{Id} + \mathbf{K}_a^*)(\psi_{\Omega}, \psi_D)^T = (I, 0)^T$$

zugrunde. Prinzipiell geht man genauso vor wie beim Beweis von Satz 3.3. Zunächst zeigt man die Differenzierbarkeit von \mathbf{K}_a^* als Operator auf $C(\partial \Omega) \times C(\partial D)$ in Abhängigkeit von D . Weil der Bildraum selbst von D abhängt, ist zunächst ein geeigneter Differenzierbarkeitsbegriff einzuführen. Wir verweisen hier lediglich auf die bereits auf Seite 24 zitierten Arbeiten von Potthast. Man erhält somit wieder die Differenzierbarkeit der Dichten ψ_{Ω}, ψ_D . Dann benutzt man, daß S_D als Operator von $C(\partial D)$ nach $C^{\infty}(\mathbb{R}^n \setminus \partial D)$ differenzierbar von D abhängt. Hierbei wird $C^{\infty}(\mathbb{R}^n \setminus \partial D)$ als Fréchet-Raum mit den Halbnormen

$$\|f\|_{K,m} := \sup_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leq m}} \left| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \right|, \quad K \subset \mathbb{R}^n \setminus \partial D \text{ kompakt}, \quad m \in \mathbb{N}, \\ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

aufgefaßt. Da der äußere Rand $\partial \Omega$ nicht variiert, läßt sich jetzt aus der Stetigkeit von $S_{\Omega} : C(\partial \Omega) \rightarrow \mathbb{R}^n$ das Differenzierbarkeitsergebnis ableiten.

Bezeichnet man die Ableitungen nach dem Gebiet D mit $\partial / \partial Z$, so erhält man durch Differenzieren von (3.30)

$$(3.31) \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Z} = (0, \frac{\partial S_D}{\partial Z}) ((\text{Id} + \mathbf{K}_a^*)^{-1} (I, 0)^T) \\ - (S_{\Omega}, S_D) \left((\text{Id} + \mathbf{K}_a^*)^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}_a^*}{\partial Z} (\text{Id} + \mathbf{K}_a^*)^{-1} (I, 0)^T \right).$$

Mit den von Potthast zur Charakterisierung von Gebietsableitungen bei Streuproblemen zur Helmholtzgleichung benutzten Techniken kann man aus diesem Ausdruck die Randgleichungen (3.29c)–(3.29e) für das abgeleitete Potential nachweisen. Da eine exakte Herleitung erheblichen Aufwand erfordern würde, wollen wir hierauf nicht weiter eingehen.

Das durch (3.29) definierte Randwertproblem fällt nicht mehr in die in Satz 3.2 abgehandelte Klasse von Randwertaufgaben, weil in (3.29c) eine Unstetigkeit des Potentials auf ∂D zugelassen wird. Um nachzuweisen, daß u^* durch (3.29) eindeutig bestimmt ist, ist zu zeigen, daß jede Lösung des Problems bei verschwindenden rechten Seiten in (3.29c), (3.29d) trivial ist. Auf dieses homogene Problem läßt sich der Eindeigkeitsteil von Satz (3.2) anwenden.

Wir wollen die rechten Seiten in (3.29c), (3.29d) in eine Form bringen, wie sie von Hettlich [16] aus der schwachen Formulierung hergeleitet worden ist. Später soll (3.29) benutzt werden, um zu zeigen, daß für $I \neq 0$, $a \neq 1$ die Ableitung u^* nur dann verschwindet, wenn Z tangential zu ∂D liegt. Da uns dies nur im \mathbb{R}^2 gelingen wird, beschränken wir die Darstellung auch hier auf den zweidimensionalen Fall. Eine ähnliche Rechnung läßt sich auch in höheren Dimensionen durchführen, sie ist aber durch die komplizierteren differentialgeometrischen Verhältnisse schwieriger zu überblicken.

Es seien $\Omega, D \subset \mathbb{R}^2$ wie oben und $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)^T : [0, L] \rightarrow \partial D$ eine positiv orientierte Parametrisierung von ∂D nach der Bogenlänge. Die Ableitungen nach dem Kurvenparameter bezeichnen wir wie üblich durch Punkte oberhalb der Funktionssymbole. Es sei $\tau(\gamma(t)) := \tau_D(\gamma(t)) := \dot{\gamma}(t)$ die Einheitstangente an ∂D . Für $k = 1, 2$ benutzen wir die Symbole

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k f}{\partial \tau^k} &:= \frac{d^k}{dt^k} f(\gamma(t)), & f &\in C^k(\partial D), \\ \frac{\partial^k g}{\partial \nu^k} &:= \left. \frac{d^k}{ds^k} \right|_{s=0} g(\gamma(t) + s\nu(t)), & g &\in C^k(\bar{D}) \quad \text{oder} \quad g \in C^k(\Omega \setminus D), \end{aligned}$$

für die Ableitungen nach dem Bogenparameter und der äußeren Normalen. Die Bezeichnung $\partial f / \partial \tau$ anstatt \dot{f} benutzen wir immer dann, wenn f auch außerhalb von ∂D definiert ist. Für einen Vektor $v = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^2$ sei v^- der zu v senkrechte Vektor $(v_2, -v_1)^T$. Dann ist $(v^-)^- = -v$ und $\nu = \tau^-$.

Wegen $u_+ = u_-$ auf ∂D stimmen die tangentialen Komponenten von ∇u_+ und ∇u_- auf ∂D überein. Durch die Zerlegung $Z = \langle Z, \nu \rangle \nu + \langle Z, \tau \rangle \tau$ und die Transmissionbedingung (3.3c) erhält man für die Gleichung (3.29c)

$$(3.32) \quad u_+^* - u_-^* = -\langle Z, \nu \rangle \left(\frac{\partial u_+}{\partial \nu} - \frac{\partial u_-}{\partial \nu} \right) = -\frac{a-1}{a} \langle Z, \nu \rangle \frac{\partial u_+}{\partial \nu}.$$

Zur Umformung der rechten Seite in (3.29d) berechnen wir zunächst den Ausdruck $\partial \nu / \partial Z$. Wir schreiben im folgenden kurz $Z(t)$ und $\dot{Z}(t)$ für $Z(\gamma(t))$ und die Ableitung von Z nach der Bogenlänge im Punkt $\gamma(t)$. Die Randkurve $\partial D + \alpha Z$

von $D_{\alpha Z}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ hinreichend klein, hat die Parametrisierung $t \mapsto \gamma(t) + \alpha Z(t)$. Die äußere Normale auf $\partial D + \alpha Z$ ist durch $\nu_{D_{\alpha Z}} = (\nu_D + \alpha \dot{Z}^-) / |\nu_D + \alpha \dot{Z}^-|$ gegeben. Ableiten nach α bei $\alpha = 0$ ergibt

$$(3.33) \quad \frac{\partial \nu_D}{\partial Z} = \dot{Z}^- - \langle \dot{Z}^-, \nu_D \rangle \nu_D = \langle \dot{Z}^-, \tau_D \rangle \tau_D = -\langle \dot{Z}^-, \nu_D \rangle \tau_D.$$

Die rechte Seite in (3.29d) ist auch für $Z \in \mathfrak{C}^{1,\alpha}(\partial D)$ definiert und hängt linear von Z ab. Wir dürfen daher Z in den Normal- und den Tangentialteil aufspalten und die Teile getrennt abhandeln. Weil wir im folgenden nur noch τ und ν des Gebietes D betrachten, lassen wir den Index D an diesen Vektorfeldern weg.

Wir prüfen nach, daß die rechte Seite für ein tangenciales Z verschwinden. Es sei $Z = z_\tau \tau$ mit $z_\tau \in C^{1,\alpha}(\partial D)$. Wegen $\dot{\tau} = \ddot{\gamma} - \tau$ ist $\dot{\tau} = \langle \dot{\tau}, \nu \rangle \nu = -\kappa \nu$. Hier ist $\kappa := -\langle \dot{\tau}, \nu \rangle$ die Krümmung der Kurve. Das Vorzeichen von κ ist so gewählt, daß ein positiv orientierter Kreis positive Krümmung hat. Aus $\dot{Z} = \dot{z}_\tau \tau + z_\tau \dot{\tau} = \dot{z}_\tau \tau - z_\tau \kappa \nu$ und (3.33) folgt

$$(3.33') \quad \frac{\partial \nu}{\partial Z} = z_\tau \kappa \tau, \quad \text{falls } Z = z_\tau \tau.$$

Durch Ausdifferenzieren des Ausdrucks

$$\frac{\partial^2 u_\pm}{\partial \tau \partial \nu}(\gamma(t)) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u_\pm}{\partial x_1}(\gamma(t)) \dot{\gamma}_2(t) - \frac{\partial u_\pm}{\partial x_2}(\gamma(t)) \dot{\gamma}_1(t) \right)$$

erhält man mit $\dot{\nu} = \kappa \tau$

$$\frac{\partial^2 u_\pm}{\partial \tau \partial \nu} = \langle \nabla^2 u_\pm(\tau), \nu \rangle + \kappa \frac{\partial u_\pm}{\partial \tau}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \langle (\nabla^2 u_+ - a \nabla^2 u_-)(Z), \nu \rangle &= z_\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial u_+}{\partial \nu} - a \frac{\partial u_-}{\partial \nu} \right) \\ &\quad - z_\tau \kappa \left(\frac{\partial u_+}{\partial \tau} - a \frac{\partial u_-}{\partial \tau} \right) \\ &= (a - 1) z_\tau \kappa \frac{\partial u}{\partial \tau}, \end{aligned}$$

wegen $u_+ = u_-$ auf ∂D und der Transmissionsbedingung (3.3c). Zusammen mit (3.33') erhält man für die rechte Seite von (3.29d)

$$\frac{\partial u_+^*}{\partial \nu} - a \frac{\partial u_-^*}{\partial \nu} = (1 - a) z_\tau \kappa \frac{\partial u}{\partial \tau} - z_\tau \kappa \frac{\partial u_+}{\partial \tau} + a z_\tau \kappa \frac{\partial u_-}{\partial \tau} = 0.$$

Jetzt sei $Z = z_\nu \nu$ ein normales Feld. Wegen $\dot{Z} = \dot{z}_\nu \nu + z_\nu \dot{\nu} = \dot{z}_\nu \nu + z_\nu \kappa \tau$ folgt aus (3.33)

$$(3.33'') \quad \frac{\partial \nu}{\partial Z} = -\dot{z}_\nu \tau, \quad \text{falls } Z = z_\nu \nu.$$

Durch mehrfaches Anwenden der Kettenregel erhält man

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_{\pm}}{\partial \tau^2} &= \frac{\partial u_{\pm}}{\partial x_1^2} \dot{\gamma}_1^2 + \frac{\partial^2 u_{\pm}}{\partial x_2^2} \dot{\gamma}_2^2 + 2 \frac{\partial^2 u_{\pm}}{\partial x_1 \partial x_2} \dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_2 + \langle \nabla u_{\pm}, \ddot{\gamma} \rangle, \\ \frac{\partial^2 u_{\pm}}{\partial \nu^2} &= \frac{\partial u_{\pm}}{\partial x_1^2} \dot{\gamma}_2^2 + \frac{\partial^2 u_{\pm}}{\partial x_2^2} \dot{\gamma}_1^2 - 2 \frac{\partial^2 u_{\pm}}{\partial x_1 \partial x_2} \dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_2 = \langle \nabla^2 u_{\pm}(\nu), \nu \rangle.\end{aligned}$$

Da die zweiten Ableitungen von u_{\pm} inklusive des Randes ∂D stetig sind, gilt $\Delta u_{\pm} = 0$ auch auf ∂D . Mit $|\dot{\gamma}| = 1$ und $\ddot{\gamma} = -\kappa \nu$ folgt

$$\frac{\partial^2 u_{\pm}}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 u_{\pm}}{\partial \nu^2} = \Delta u_{\pm} - \kappa \frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu} = -\kappa \frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu}.$$

Mit (3.33'') kann man die rechte Seite von (3.29d) jetzt umformen zu

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_{+}^*}{\partial \nu} - a \frac{\partial u_{-}^*}{\partial \nu} &= -z_{\nu} \frac{\partial^2 u_{+}}{\partial \nu^2} + a z_{\nu} \frac{\partial^2 u_{-}}{\partial \nu^2} - (a-1) z_{\nu} \frac{\partial u}{\partial \tau} \\ &= (1-a) z_{\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + z_{\nu} \kappa \left(\frac{\partial u_{+}}{\partial \nu} - a \frac{\partial u_{-}}{\partial \nu} \right) \\ &\quad - (a-1) z_{\nu} \kappa \frac{\partial u}{\partial \tau}.\end{aligned}$$

Der Ausdruck in der großen Klammer auf der rechten Seite verschwindet wegen der Transmissionsbedingung (3.3c). Zusammen mit (3.32) ist damit die folgende Aussage bewiesen.

Notiz. Die Gleichungen (3.29c) und (3.29d) in Satz 3.4 lassen sich durch

$$(3.29c') \quad u_{+}^* - u_{-}^* = -\frac{a-1}{a} z_{\nu} \frac{\partial u_{+}}{\partial \nu} \quad \text{auf } \partial D,$$

$$(3.29d') \quad \frac{\partial u_{+}^*}{\partial \nu} - a \frac{\partial u_{-}^*}{\partial \nu} = (1-a) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(z_{\nu} \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) \quad \text{auf } \partial D$$

ersetzen. Hierbei ist $z_{\nu} = \langle Z, \nu \rangle$ die Normalenkomponente des Vektorfeldes Z .

Satz 3.5. Es sei $D \subset \Omega$ offen, zusammenhängend, einfach zusammenhängend und $C^{2,\alpha}$ -glatt berandet mit $\bar{D} \subset \Omega$. Es sei $Z \in \mathfrak{C}^{2,\alpha}(\partial D)$, $a \neq 1$, $I \in C_{*}(\partial \Omega)$ und u^* die durch (3.29) definierte Gebietsableitung bei ∂D in Richtung Z . Ist dann $u^* = 0$ auf einer offenen Teilmenge von $\partial \Omega$, so gilt für alle in D harmonischen $v \in C^1(\bar{D})$

$$\int_{\partial D} z_{\nu} \langle \nabla u_{+}, \nabla v \rangle ds = 0.$$

Bew. Es sei $u^* = 0$ auf einer offenen Teilmenge von $\partial \Omega$. Aus (3.29e) und dem Holmgrenschen Eindeutigkeitssatz folgt $u_{+}^* = 0$. Ist v wie in der Behauptung, so ergibt sich mit dem 2. Greenschen Satz und (3.29c'), (3.29d')

$$0 = \int_D (u^* \Delta v - v \Delta u^*) dx = \int_{\partial D} u_{-}^* \frac{\partial v}{\partial \nu} ds - \int_{\partial D} \frac{\partial u_{-}^*}{\partial \nu} v ds$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a-1}{a} \int_{\partial D} z_\nu \frac{\partial u_+}{\partial \nu} \frac{\partial v}{\partial \nu} ds - \frac{a-1}{a} \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(z_\nu \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) v ds \\
&= \frac{a-1}{a} \int_{\partial D} z_\nu \langle \nabla u_+, \nabla v \rangle ds. \quad \square
\end{aligned}$$

In der gleichen Weise kann man auch zur Berechnung der Gebietsableitung des in (3.25) definierten Hilfsproblems verfahren. Ist $u' := \mathcal{L}_h(D; I)$ und $(u')^*$ die Gebietsableitung des Potentials an der Stelle D in Richtung Z , so erhält man anstelle von (3.29c'), (3.29d')

$$(3.29c'_h) \quad (u')_+^* - (u')_-^* = z_\nu \frac{\partial u_I}{\partial \nu},$$

$$(3.29d'_h) \quad \frac{\partial (u')_+^*}{\partial \nu} - \frac{\partial (u')_-^*}{\partial \nu} = -\frac{\partial}{\partial \tau} \left(z_\nu \frac{\partial u_I}{\partial \tau} \right).$$

Hier ist wieder $u_I := \mathcal{L}(\mathbb{1}_\Omega; I)$. Die entsprechende Version von Satz 3.5 lautet:

Satz 3.6. *Es seien D, I, Z wie in Satz 3.5. Verschwindet*

$$(u')^* := \frac{d}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} \mathcal{L}_h(D_{\alpha Z}; I) \Big|_{\partial \Omega}.$$

auf einer offenen Teilmenge von $\partial \Omega$, so gilt für alle in D harmonischen $v \in C^1(\bar{D})$

$$\int_{\partial D} z_\nu \langle \nabla u_I, \nabla v \rangle = 0.$$

Für $I \in C_*(\partial \Omega)$, $a > 0$, $Z \in \mathfrak{C}^{2,\alpha}(\partial D)$ definieren wir

$$(3.35a) \quad \mathcal{L}^*(D, a, I; Z) := \frac{d}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} \mathcal{L}(\chi_{\bar{\Omega} \setminus D_{\alpha Z}} + a \chi_{D_{\alpha Z}}; I)$$

$$(3.35b) \quad \text{und } \mathcal{L}_h^*(D, I; Z) := \frac{d}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} \mathcal{L}_h(D_{\alpha Z}; I).$$

Die beiden Ableitungen auf der rechten Seite sind nach der Beweisskizze von Satz 3.4 als Elemente von $C^\infty(\Omega \setminus \partial D)$ aufzufassen. Diese lassen sich auf die Ränder $\partial \Omega$ und ∂D fortsetzen und lösen dann die Transmissionprobleme (3.29) beziehungsweise (3.29c'_h), (3.29d'_h).

Die letzten beiden Sätze sind auch im \mathbb{R}^n , $n \geq 3$ richtig. Im wesentlichen sind höherdimensionale Versionen der Gleichungen (3.29d'), (3.29d'_h) zu beweisen. So hat zum Beispiel die Gleichung (3.29d') die Gestalt

$$\frac{\partial u_+^*}{\partial \nu} - a \frac{\partial u^*}{\partial \nu} = (1-a) \text{Div}_{\partial D}(z_\nu \text{Grad}_{\partial D} u).$$

Hier bezeichnen $\text{Div}_{\partial D}$, $\text{Grad}_{\partial D}$ die Oberflächendivergenz beziehungsweise den Oberflächengradienten auf ∂D . Satz 3.5 läßt sich mit dieser Formel genau wie oben beweisen.

Schließlich betrachten wir den Fall mehrerer brechender Gebiete. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß Ω zwei zusammenhängende und einfach zusammenhängende Gebiete D_1, D_2 mit

$$\bar{D}_j \subset \Omega, \quad j = 1, 2, \quad \partial D_1 \cap \partial D_2 = \emptyset$$

enthält. Gilt $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, so übertragen sich die Aussagen dieses Abschnitts ohne Schwierigkeiten. Die Gebietsableitungen kann man dann getrennt voneinander abhandeln. Die Randbedingungen (3.29c'), (3.29d') erhält man für die Ableitung nach beiden Gebieten D_1, D_2 , und entsprechend gelten dann auch die Sätze 3.5, 3.6 für beide Gebiete.

Anders liegen die Dinge, wenn $D_2 \subset D_1$ zugelassen ist. Die Charakterisierung der Gebietsableitung bleibt nach sinngemäßer Modifikation der Konstanten in den Gleichungen (3.29c'), (3.29d') auf ∂D_2 weiterhin richtig. Der Beweis der Sätze 3.5, 3.6 läßt sich allerdings nicht übertragen, weil man aus dem Verschwinden des abgeleiteten Potentials u^* auf $\partial\Omega$ nicht folgern kann, daß $u^*|_{D_1 \setminus \bar{D}_2}$ auf dem inneren Rand ∂D_2 verschwindet.

4 Das inverse Problem bei stückweise konstanter Leitfähigkeit

Wir untersuchen jetzt das zweidimensionale inverse Problem für stückweise konstante Leitfähigkeiten bei nur einer Stromeinspeisung auf Eindeutigkeit. Anhand einfacher Gegenbeispiele kann man sich überlegen, daß im allgemeinen σ nicht aus den Randwerten eines einzigen Potentials bestimmt werden kann. Ist Ω die Einheitskreisscheibe, σ von der Form

$$(4.1) \quad \sigma(x) = \begin{cases} a, & |x| < r, \\ 1, & |x| \geq r, \end{cases} \quad 0 < r < 1, \quad a > 0$$

und I die Einspeisung $I(\cos \theta, \sin \theta) = \cos m\theta$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $m \in \mathbb{N}$, so läßt sich die Lösung des direkten Problems durch Separation der Variablen in Polarkoordinaten explizit lösen. Man erhält, daß das Randpotential von der Form $f(a, r) \cdot \cos m\theta$ mit einer stetig differenzierbar von a und r abhängigen Funktion f ist. Für die von den zwei Parametern a , r abhängige Leitfähigkeit der Form (4.1) ist der Bildraum $\Lambda(\sigma; I)$ also der eindimensionale Unterraum $\mathbb{R} \cdot \cos(m\theta)$. Daran sieht man, daß es im allgemeinen nicht möglich ist, das Gebiet D und seine Leitfähigkeit aus einer Einspeisung zu rekonstruieren. Wir werden daher annehmen, daß der innere Leitfähigkeitswert a bekannt ist und nur das Gebiet D bestimmt werden soll.

Mit derselben Argumentation erhält man auch, daß die beiden Radien $0 < r < R < 1$ eines Torus um den Ursprung aus den Randdaten bei nur einer Einspeisung $\cos m\theta$ selbst bei bekannter innerer Leitfähigkeit nicht zu rekonstruieren sind. Das widerlegt eine allgemeine Eindeutigkeitsaussage für nicht einfach zusammenhängende Gebiete.

Wir werden beweisen, daß für $a \neq 1$, $I \neq 0$ und D einfach zusammenhängend die Gebietsableitung von

$$\Lambda(\chi_{\bar{\Omega} \setminus D} + a\chi_D; I)$$

nur verschwindet, wenn in Richtung eines tangentialen Vektorfeldes auf ∂D abgeleitet wird. Hieraus folgt eine schwache lokale Eindeutigkeitsaussage. Ist $Z \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\partial D)$ nicht tangential und $D_{\alpha Z}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ klein, wie im vorherigen Abschnitt das mit αZ deformierte Gebiet, so existiert ein $\varepsilon = \varepsilon(Z) > 0$ mit

$$\Lambda(\chi_{\bar{\Omega} \setminus D_{\alpha Z}} + a\chi_{D_{\alpha Z}}; I) \neq \Lambda(\chi_{\bar{\Omega} \setminus D} + a\chi_D; I) \quad \text{für alle } 0 < |\alpha| < \varepsilon.$$

Anschließend belegen wir anhand eines vereinfachten Problems, daß eine globale Eindeutigkeitsaussage auch für einfach zusammenhängende Gebiete nicht erwartet werden darf.

4.1 Die Injektivität der Gebietsableitung

4.1.1 Notationen und Beweisskizze

Aus dem Satz 3.5 folgt die Injektivität der Gebietsableitung, wenn man zeigen kann, daß der Raum

$$\{\langle \nabla u_+, \nabla v \rangle : v \in C^{1,\alpha}(D), \Delta v = 0 \text{ in } D\}$$

dicht in $L^1(\partial D)$ liegen. Offensichtlich liegt ein $h \in C^\alpha(\partial D)$ genau dann in diesem Raum, wenn das Randwertproblem

$$(4.2) \quad \text{Finde } v \in C^{1,\alpha}(D) \text{ mit } \Delta v = 0 \text{ in } D \text{ und } \langle \nabla u_+, \nabla v \rangle = h \text{ auf } \partial D$$

lösbar ist. Um die Dichtheitsaussage zu beweisen, ist daher zu zeigen, daß das obige Randwertproblem für eine in $L^1(\partial D)$ dichte Teilmenge lösbar ist. Bei der Behandlung mit der Integralgleichungsmethode führt diese Randwertaufgabe auf stark singuläre Integralgleichungen, für die im \mathbb{R}^n , $n \geq 3$ keine für unsere Zwecke ausreichende Lösungstheorie existiert. Im zweidimensionalen Fall wird (4.2) durch die Identifizierung $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, $(x_1, x_2)^T \simeq x_1 + ix_2$ zu einem Hilbertproblem. Die für diese Problemklasse vorhandene Theorie wird uns in die Lage versetzen, die Dichtheitsaussage zu beweisen.

Wir machen jetzt von der in Abschnitt 1.1 erwähnten Konvention Gebrauch, Räume komplexwertiger Funktionen durch einen unteren Index \mathbb{C} zu kennzeichnen. Es sei

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(D) &:= \{f \in C^\infty(D)_{\mathbb{C}} : f \text{ ist holomorph in } D\}, \\ \mathcal{H}^\alpha(D) &:= C^\alpha(\bar{D}) \cap \mathcal{H}(D). \end{aligned}$$

Für ein stetiges Vektorfeld $Z : \partial D \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei

$$B_a^{\partial D}(Z) := \langle Z, \tau \rangle \tau + a \langle Z, \nu \rangle \nu, \quad a \in \mathbb{R}, a > 0$$

das zum Koeffizienten a gebrochene Feld auf ∂D . Wir werden später häufig verwenden, daß die Nullstellenmengen von Z und $B_a^{\partial D}(Z)$ übereinstimmen. Der Operator $B_a^{\partial D}$ läßt sich durch die Identifizierung $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ auch als Operator auf den komplexwertigen Funktionen auf ∂D auffassen. Ziel dieses Abschnittes ist es, den folgenden Satz zu beweisen.

Satz 4.1. *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, beschränkt, zusammenhängend, einfach zusammenhängend und C^2 -glatt berandet. Es sei $f \in \mathcal{H}^\alpha(D)$, $f \neq 0$ und $\varphi_a := B_a^{\partial D}(\overline{f}|_{\partial D})$, $a > 0$. Dann ist*

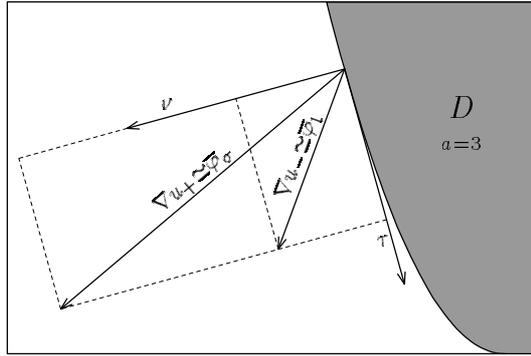
$$\mathcal{F}(\varphi_a; \partial D) := \{\text{Re}(\overline{\varphi_a} g) : g \in \mathcal{H}^\alpha(D)\}$$

dicht in $L^1(\partial D)$.

Hieraus läßt sich die Injektivität der Gebietsableitungen unmittelbar ableiten.

Korollar 4.2. *Es seien D, a, I wie in Satz 3.5, $I \neq 0$ und Γ eine offene Teilmenge von $\partial\Omega$. Die in (3.35) definierten Gebietsableitungen $\mathcal{L}^*(D, a, I; Z)$, $\mathcal{L}_h^*(D, I; Z)$ verschwinden genau dann auf Γ , wenn Z tangential an ∂D liegt.*

Bew. Für eine in D harmonische Funktion v ist $\partial v/\partial x_1 - i\partial v/\partial x_2$ holomorph. Weil D einfach zusammenhängend ist, existiert umgekehrt auch zu jeder in D holomorphen Funktion g eine harmonische Funktion v mit $\bar{g} \simeq \nabla v$.



Es sei $u := \mathcal{L}(\chi_{\Omega \setminus D} + a\chi_D; I)$ die Lösung des Transmissionsproblems (3.3) zu D, a und I . Es seien $f_- \in \mathcal{H}^\alpha(D)$, $f_+ \in \mathcal{H}^\alpha(\Omega \setminus \bar{D})$ die durch $\bar{f}_- \simeq \nabla u_-$, $\bar{f}_+ \simeq \nabla u_+$ definierten Funktionen. Aus den Transmissionsbedingungen

$$u_+ = u_- \quad \text{und} \quad \frac{\partial u_+}{\partial \nu} = a \frac{\partial u_-}{\partial \nu} \quad \text{auf } \partial D$$

folgt $B_a^{\partial D}(\nabla u_-) = \nabla u_+$. Setzt man in Satz 4.1 $f := f_-$, so folgt

$$\bar{\varphi}_a = B_a^{\partial D}(\bar{f}_-|_{\partial D}) \simeq B_a^{\partial D}(\nabla u_-|_{\partial D}) = \nabla u_+|_{\partial D}.$$

Die Bedingung $f \neq 0$ aus Satz 4.1 ist erfüllt, denn andernfalls wäre u_- konstant, und aus dem Holmgrenschen Eindeutigkeitssatz würde folgen, daß auch u_+ konstant ist, im Widerspruch zu $I \neq 0$.

Sind $z, w \in \mathbb{C}$, so ist $\text{Re}(z\bar{w})$ das Skalarprodukt von z und w aufgefaßt als Vektoren im \mathbb{R}^2 . Ist $v \in C^{1,\alpha}(\bar{D})$ harmonisch in D und $g \in \mathcal{H}^\alpha(D)$ mit $\bar{g} \simeq \nabla v$, so ist daher $\text{Re}(\bar{\varphi}_a g) = \langle \nabla u_+, \nabla v \rangle$ auf ∂D . Also ist

$$\mathcal{F}(\varphi_a; \partial D) = \{ \langle \nabla u_+, \nabla v \rangle : v \in C^{1,\alpha}(\bar{D}), \Delta v = 0 \text{ in } D \}.$$

Nach Satz 4.1 findet man eine Folge \hat{z}_k , $k \in \mathbb{N}$ in $\mathcal{F}(\varphi_a; \partial D)$, die in $L^1(\partial D)$ gegen die Normalenkomponente z_ν von Z konvergiert. Weil z_ν stetig ist, konvergiert $\hat{z}_k z_\nu$ in $L^1(\partial D)$ gegen z_ν^2 . Aus Satz 3.5 folgt

$$\int_{\partial D} z_\nu \hat{z}_k ds = 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Durch Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ folgt jetzt $\int_{\partial D} z_\nu^2 ds = 0$, also ist $z_\nu = 0$.

Die Argumentation für die Injektivität von $\mathcal{L}_h^*(D; \cdot)$ verläuft genauso, wenn man in Satz 4.1 $\bar{f} \simeq \nabla u_I|_{\bar{D}}$ wählt und $a = 1$ setzt. \square

Im \mathbb{R}^2 ist (4.2) also äquivalent zu dem Hilbertproblem

$$(4.3) \quad \text{Finde } g \in \mathcal{H}^\alpha(D) \text{ mit } \operatorname{Re}(\bar{\varphi}_a g) = h \text{ auf } \partial D.$$

Falls die Koeffizientenfunktion φ_a auf ∂D nirgends verschwindet, hängt das Lösungsverhalten dieser Gleichung vom Index der Randfunktion φ_a ab. Gerade dann ist (4.3) für jedes $h \in C^\alpha(\partial D)$ lösbar, wenn der Index von φ_a nichtnegativ ist. Die Definition des Index und einen Beweis dieser Aussage findet man in [24] oder in [13]. Nehmen wir an, daß φ_a nullstellenfrei ist, so ist der Index $\operatorname{Ind}(\varphi_a)$ von φ_a tatsächlich nichtnegativ. Es ist nämlich

$$\overline{B_\lambda^{\partial D}(\bar{f}|_{\partial D})}, \quad \lambda = a + t(1 - a), \quad t \in [0, 1]$$

eine stetige, nullstellenfreie Transformation von φ_a in $f|_{\partial D}$. Da sich der Index bei solch einer Transformation nicht ändern kann, ist der Index von φ_a gleich dem von $f|_{\partial D}$. Weil f in D holomorph ist, ist der Index von $f|_{\partial D}$ gleich der Anzahl der Nullstellen von f in D . Insbesondere ist also

$$(4.4) \quad \operatorname{Ind}(\varphi_a) = \operatorname{Ind}(f|_{\partial D}) \geq 0.$$

Besitzt φ_a keine Nullstellen, ist somit $C^\alpha(\partial D) \subset \mathcal{F}(\varphi_a; \partial D)$ und Satz 4.1 folgt unmittelbar.

Ist andererseits $\varphi_a(z_0) = 0$ für ein $z_0 \in \partial D$, so ist offensichtlich, daß (4.3) höchstens dann lösbar ist, wenn auch h in z_0 eine Nullstelle hat.

Die Schwierigkeit beim Beweis von Satz 4.1 besteht daher gerade darin, die Nullstellen von φ_a geeignet abzuhandeln. Aus dem bisher gesagtem ist klar, daß man (4.3) nur für solche h zu betrachten braucht, deren Nullstellenmenge die Nullstellen von φ_a umfaßt. Es stellt sich als günstig heraus, nur solche Inhomogenitäten zu betrachten, die sogar in einer ganzen Umgebung der Nullstellen von φ_a verschwinden. Wir vereinbaren die folgenden Notationen.

$$N(\varphi_a; \partial D) := \{z \in \partial D : \varphi_a(z) = 0\} = \{z \in \partial D : f(z) = 0\}$$

und für $J \subset \partial D$ abgeschlossen und zusammenhängend sei

$$C^\alpha(\partial D, J) := \{h \in C^\alpha(\partial D) : \operatorname{Trg}(h) \subset J\}.$$

Die rechten Seiten, die im Beweis betrachtet werden, wählen wir aus

$$(4.5) \quad C^\alpha(\varphi_a; \partial D) := \bigcup_{\substack{J \subset \partial D \setminus N(\varphi_a; \partial D) \\ J \text{ abg., zshgd.}}} C^\alpha(\partial D, J).$$

Den Beweis von Satz 4.1 erbringen wir in vier Schritten.

- (i) Zuerst zeigen wir mit Hilfe des Riemannsches Abbildungssatzes, daß man ohne Einschränkung der Allgemeinheit

$$D = \mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \quad \partial D = \mathbf{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

annehmen darf.

- (ii) Als nächstes weisen wir nach, daß der lineare Spann von $C^\alpha(\varphi_a; \mathbf{S}^1)$ dicht in $L^1(\mathbf{S}^1)$ liegt. Zum Beweis von Satz 4.1 reicht es daher aus zu zeigen, daß $C^\alpha(\varphi_a; \mathbf{S}^1)$ im $L^1(\mathbf{S}^1)$ -Abschluß von $\mathcal{F}(\varphi_a; \mathbf{S}^1)$ enthalten ist.
- (iii) Danach erbringen wir den Beweis von Satz 4.1 für ein auf einer Umgebung von $\bar{\mathcal{D}}$ holomorphes f . Wir werden zeigen, daß dann (4.3) für jede rechte Seite $h \in C^\alpha(\varphi_a; \mathbf{S}^1)$ lösbar ist, also $C^\alpha(\varphi_a; \mathbf{S}^1) \subset \mathcal{F}(\varphi_a; \mathbf{S}^1)$ gilt.

Beim Beweis dieser Aussage wird $D = \mathcal{D}$ nicht benutzt. Man braucht lediglich, daß der Rand ∂D analytisch ist. Auch der Teil (ii) ist für allgemeines D richtig. Da sich bei einem analytisch berandetem Gebiet D das innere Potential u_- des Transmissionsproblems (3.3) harmonisch auf eine Umgebung von \bar{D} fortsetzen läßt, kann man hieraus schon das Korollar 4.2 für analytisch berandete Gebiete herleiten.

Der Grund dafür, daß wir uns schon hier auf $D = \mathcal{D}$ einschränken, liegt darin, daß wir in (iv) die expliziten Ausdrücke benötigen, die für die Lösung von (4.3) auf der Einheitskreisscheibe gegeben sind.

- (iv) Der aufwendigste Teil des Beweises ist es, Satz 4.1 für allgemeines $f \in \mathcal{H}^\alpha(\mathcal{D})$ zu zeigen. Dies geschieht, indem man φ_a „von innen“ approximiert. Für $0 < r < 1$ definieren wir

$$f_r(z) := f(rz), \quad |z| < 1/r, \quad \varphi_a^{(r)} := \overline{B_a^{\mathbf{S}^1}(\bar{f}_r|_{\mathbf{S}^1})}.$$

Die Funktionen f_r sind dann auf einer Umgebung von $\bar{\mathcal{D}}$ holomorph. Nach Teil (iii) gilt also $C^\alpha(\varphi_a^{(r)}; \mathbf{S}^1) \subset \mathcal{F}(\varphi_a^{(r)}; \mathbf{S}^1)$.

Es sei jetzt $h \in C^\alpha(\mathbf{S}^1, J)$ für ein abgeschlossenes, zusammenhängendes $J \subset \mathbf{S}^1 \setminus N(\varphi_a; \mathbf{S}^1)$ gegeben. Die Stetigkeit von $B_a^{\mathbf{S}^1} : C^\alpha(\mathbf{S}^1)_{\mathbb{C}} \rightarrow C^\alpha(\mathbf{S}^1)_{\mathbb{C}}$ ist offensichtlich. Es gilt also

$$(4.6) \quad \varphi_a^{(r)} \xrightarrow[r \rightarrow 1]{} \varphi_a \quad (C^\alpha(\mathbf{S}^1)_{\mathbb{C}}\text{-Konvergenz}).$$

Insbesondere konvergiert $\varphi_a^{(r)}$ gleichmäßig gegen φ_a . Ist r hinreichend nahe bei 1, so ist daher auch $\varphi_a^{(r)}$ auf J nullstellenfrei, und somit ist $h \in C^\alpha(\varphi_a^{(r)}; \mathbf{S}^1)$. Für diese r existiert dann $g_r \in \mathcal{H}^\alpha(\mathcal{D})$ mit

$$\operatorname{Re}(\overline{\varphi_a^{(r)}} g_r) = h \quad \text{auf } \mathbf{S}^1.$$

Unser Ziel ist es jetzt

$$(4.7) \quad \operatorname{Re}(\overline{\varphi}_a g_r) \xrightarrow[r < 1]{r \rightarrow 1} h \quad (L^1(\mathbf{S}^1)\text{-Konvergenz})$$

zu zeigen. Hieraus folgt, daß $C^\alpha(\varphi_a; \mathbf{S}^1)$ im $L^1(\mathbf{S}^1)$ -Abschluß von $\mathcal{F}(\varphi_a; \mathbf{S}^1)$ enthalten ist. Satz 4.1 ist dann vollständig bewiesen.

Ruft man sich ins Gedächtnis, daß der Ausdruck $\operatorname{Re}(\overline{z}w)$, $z, w \in \mathbb{C}$ das Skalarprodukt von z und w aufgefaßt als Vektoren im \mathbb{R}^2 ist, so erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\operatorname{Re}(\overline{\varphi}_a g_r) - h\|_{L^1(\mathbf{S}^1)} &= \left\| \operatorname{Re}(\overline{\varphi}_a g_r) - \operatorname{Re}(\overline{\varphi_a^{(r)}} g_r) \right\|_{L^1(\mathbf{S}^1)} \\ &= \left\| \operatorname{Re}((\overline{\varphi}_a - \overline{\varphi_a^{(r)}})g_r) \right\|_{L^1(\mathbf{S}^1)} \\ &\leq \|\varphi_a - \varphi_a^{(r)}\|_{L^\infty(\mathbf{S}^1)_\mathbb{C}} \|g_r\|_{L^1(\mathbf{S}^1)_\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

Wegen (4.6) konvergiert $\|\varphi_a - \varphi_a^{(r)}\|_{L^\infty(\mathbf{S}^1)_\mathbb{C}}$ für $r \rightarrow 1$ gegen 0. Zum Beweis von (4.7) ist daher zu zeigen, daß die $g_r|_{\mathbf{S}^1}$ gleichmäßig $L^1(\mathbf{S}^1)_\mathbb{C}$ -beschränkt für $r \rightarrow 1$ gewählt werden können.

4.1.2 Beweis der Injektivität

Es sei jetzt D wie in der Behauptung von Satz 4.1 und $f \in \mathcal{H}^\alpha(D)$. Nach dem Riemannschen Abbildungssatz existiert ein $C^{1,\alpha}$ -Diffeomorphismus

$$\Phi: \bar{D} \rightarrow \bar{\mathcal{D}},$$

so daß $\Phi|_D: D \rightarrow \mathcal{D}$ biholomorph ist. Es sei $u \in C^{1,\alpha}(\bar{D})$ die harmonische Funktion mit $\nabla u \simeq \overline{f}$. Dann ist $u^* := u \circ \Phi^{-1} \in C^{1,\alpha}(\bar{\mathcal{D}})$ harmonisch in \mathcal{D} . Es sei $f^* \in \mathcal{H}^\alpha(\mathcal{D})$ mit $\nabla u^* \simeq \overline{f^*}$ und

$$\varphi_a := \overline{B_a^{\partial D}(\overline{f}|_{\partial D})} \in C^\alpha(\partial D) \quad \text{und} \quad \varphi_a^* := \overline{B_a^{\mathbf{S}^1}(\overline{f^*}|_{\mathbf{S}^1})} \in C^\alpha(\mathbf{S}^1).$$

Wir bezeichnen die komplexe Ableitung $\partial\Phi/\partial z$ wie üblich durch Φ' . Ist $z \in \mathbb{C}$, $z = a+ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, so entspricht die Multiplikation mit z unter der Identifizierung $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ der Multiplikation mit $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Die komplexe Ableitung ist gerade so definiert, daß die Multiplikation mit Φ' der Multiplikation mit der Jacobi-Matrix von Φ , aufgefaßt als reeller Diffeomorphismus, entspricht. Daher ist

$$\det(D\Phi) = |\Phi'|^2.$$

Insbesondere folgt daraus, daß Φ orientierungserhaltend ist und Φ' keine Nullstellen in \bar{D} hat. Identifiziert man \mathbb{C} mit Zeilenvektoren, so entspricht die Rechtsmultiplikation mit $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ gerade der Multiplikation mit \overline{z} .

Es sei

$$\Phi^* : L^1(\mathbf{S}^1) \rightarrow L^1(\partial D), \quad \phi \mapsto \phi \circ \Phi$$

und für $q \in C(\partial D)$ sei M_q die Multiplikationsabbildung

$$M_q : L^1(\partial D) \rightarrow L^1(\partial D), \quad \psi \mapsto q \cdot \psi.$$

Lemma 4.3. *Es gilt*

$$\Phi^*(\varphi_a^*) = \varphi_a / \Phi' \quad \text{und} \quad \mathcal{F}(\varphi_a; \partial D) = M_{|\Phi'|^2}(\Phi^*(\mathcal{F}(\varphi_a^*; \mathbf{S}^1))).$$

Bew. Ist

$$\gamma : [0, L] \rightarrow \partial D$$

eine positiv orientierte Parametrisierung von ∂D nach der Bogenlänge, so ist

$$\Phi \circ \gamma : [0, L] \rightarrow \mathbf{S}^1$$

eine reguläre, positiv orientierte C^1 -Parametrisierung von \mathbf{S}^1 . Es sei $z \in \partial D$, $z = \gamma(t)$ und $w := \Phi(z) \in \mathbf{S}^1$. Wegen $(\Phi \circ \gamma)'(t) = \Phi'(z) \cdot \dot{\gamma}(t)$ und $\dot{\gamma}(t) = \tau_D(z)$ ist

$$(4.8) \quad \tau_{\mathcal{D}}(w) = \frac{\Phi'(z)}{|\Phi'(z)|} \tau_D(z) \quad \text{und} \quad \nu_{\mathcal{D}}(w) = \frac{\Phi'(z)}{|\Phi'(z)|} \nu_D(z).$$

Die zweite Identität folgt aus der ersten durch Multiplikation mit $-i$.

Für das Transformationsverhalten von ∇u unter Φ finden wir

$$\nabla u^*(w) = \nabla(u \circ \Phi^{-1})(w) = \nabla u(z) \circ D\Phi^{-1}(w).$$

Nach obiger Bemerkung entspricht die Rechtsmultiplikation mit $D\Phi^{-1}(w)$ unter $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ gerade der Multiplikation mit $(\Phi^{-1})'(w) = 1/\Phi'(z)$. Somit ist

$$(4.9) \quad f^*(w) = f(z)/\Phi'(z).$$

Schreibt man $B_a^{\mathbf{S}^1}$ komplex, so erhält man für φ_a^* den Ausdruck

$$\varphi_a^*(w) = \operatorname{Re}(f^*(w)\tau_{\mathcal{D}}(w))\overline{\tau_{\mathcal{D}}(w)} + a \operatorname{Re}(f^*(w)\nu_{\mathcal{D}}(w))\overline{\nu_{\mathcal{D}}(w)}.$$

Setzt man (4.8) und (4.9) in diese Gleichung ein, so folgt

$$\begin{aligned} \varphi_a^*(w) &= \operatorname{Re}\left(\frac{f(z)\tau_D(z)}{|\Phi'(z)|}\right)\overline{\left(\frac{\Phi'(z)}{|\Phi'(z)|}\tau_D(z)\right)} + a \operatorname{Re}\left(\frac{f(z)\nu_D(z)}{|\Phi'(z)|}\right)\overline{\left(\frac{\Phi'(z)}{|\Phi'(z)|}\nu_D(z)\right)} \\ &= \frac{\overline{\Phi'(z)}}{|\Phi'(z)|^2} \left\{ \operatorname{Re}(f(z)\tau_D(z))\overline{\tau_D(z)} + a \operatorname{Re}(f(z)\nu_D(z))\overline{\nu_D(z)} \right\} \\ &= \varphi_a(z)/\Phi'(z). \end{aligned}$$

Wegen $\Phi^*(\varphi_a^*)(z) = \varphi_a^*(w)$ ist das die erste Behauptung.

Es sei jetzt $h \in \mathcal{F}(\varphi_a^*; \mathbf{S}^1)$ gegeben. Es existiert also $g \in \mathcal{H}^\alpha(\mathcal{D})$ mit

$$\operatorname{Re}(\overline{\varphi_a^*} g) = h \quad \text{auf } \mathbf{S}^1.$$

Setzt man $\hat{g} := \Phi' \cdot (g \circ \Phi) \in \mathcal{H}^\alpha(D)$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\overline{\varphi_a(z)} \hat{g}(z)) &= \operatorname{Re}(\overline{\varphi_a^*(w)} \overline{\Phi'(z)} \Phi'(z) g(w)) \\ &= |\Phi'(z)|^2 h(w) = |\Phi'(z)|^2 \Phi^*(h)(z). \end{aligned}$$

Das zeigt die „ \supset -Richtung“ der zweiten Behauptung. Die umgekehrte Richtung erhält man auf dem gleichen Weg, indem man statt Φ die inverse Abbildung Φ^{-1} betrachtet. \square

Die Abbildungen Φ^* und $M_{|\Phi'|^2}$ sind offensichtlich stetig und stetig invertierbar. Insbesondere bilden sie dichte Teilmengen von $L^1(\mathbf{S}^1)$ beziehungsweise $L^1(\partial D)$ auf dichte Teilmengen von $L^1(\partial D)$ ab. Können wir also nachweisen, daß $\mathcal{F}(\varphi_a^*; \mathbf{S}^1)$ dicht in $L^1(\mathbf{S}^1)$ liegt, so folgt aus Lemma 4.3, daß auch $\mathcal{F}(\varphi_a; \partial D)$ dicht in $L^1(\partial D)$ liegt. Wir dürfen also im weiteren ohne Beschränkung der Allgemeinheit $D = \mathcal{D}$ annehmen.

Teil (ii) der Beweisskizze ist ein einfaches Lemma.

Lemma 4.4. *Die Nullstellenmenge $N(\varphi_a; \mathbf{S}^1)$ ist abgeschlossen und eine Nullmenge in \mathbf{S}^1 . Der Raum $C^\alpha(\varphi_a; \mathbf{S}^1)$ liegt dicht in $L^1(\mathbf{S}^1)$.*

Bew. Die Abgeschlossenheit von $N(\varphi_a; \mathbf{S}^1)$ ist wegen der Stetigkeit von φ_a klar. Aus den Definitionen folgt $N(\varphi_a; \mathbf{S}^1) = \{z \in \mathbf{S}^1 : f(z) = 0\}$. Einen Beweis für die Tatsache, daß die Nullstellen der Randwerte einer nicht überall verschwindenden Funktion in $\mathcal{H}^\alpha(\mathcal{D})$ eine \mathbf{S}^1 -Nullmenge bilden, findet man in [10], Kapitel V, Satz 6.2.

Jedes stetige, lineare Funktional auf $L^1(\mathbf{S}^1)$ ist von der Form

$$L^1(\mathbf{S}^1) \ni f \mapsto \int_{\mathbf{S}^1} h' f \, ds$$

mit $h' \in L^\infty(\mathbf{S}^1)$. Es sei $h' \in L^\infty(\partial D)$ mit

$$\int_{\mathbf{S}^1} h' h \, ds = 0 \quad \text{für alle } h \in C^\alpha(\varphi_a; \mathbf{S}^1).$$

Wir werden $h' = 0$ zeigen. Nach einer bekannten Folgerung aus dem Hahn-Banachschen Fortsetzungssatz impliziert dies die L^1 -Dichtheit von $C^\alpha(\varphi_a; \mathbf{S}^1)$. Es sei $z \in \mathbf{S}^1 \setminus N(\varphi_a; \mathbf{S}^1)$. Wir wählen eine abgeschlossene, zusammenhängende Umgebung $J \subset \mathbf{S}^1 \setminus N(\varphi_a; \mathbf{S}^1)$ von z und ein

$$\chi \in C^\alpha(\mathbf{S}^1; J) \quad \text{mit} \quad \chi \geq 0, \quad \chi(z) > 0.$$

Wegen $L^\infty(\mathbf{S}^1) \subset L^1(\mathbf{S}^1)$ und weil $C^\alpha(\mathbf{S}^1)$ dicht in $L^1(\mathbf{S}^1)$ liegt, finden wir eine Folge $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $C^\alpha(\mathbf{S}^1)$, die in $L^1(\mathbf{S}^1)$ gegen h' konvergiert. Dann ist $\chi h_k \in C^\alpha(\varphi_a; \mathbf{S}^1)$. Also gilt

$$\int_{\mathbf{S}^1} h' \chi h_k ds = 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Durch den Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ folgt $\int_{\mathbf{S}^1} \chi (h')^2 ds = 0$. Also verschwindet h' fast überall auf der Umgebung $\chi > 0$ von z . Weil $N(\varphi_a; \mathbf{S}^1)$ eine Nullmenge ist, ist somit $h' = 0$ fast überall.

Mit derselben Argumentation läßt sich zeigen, daß $C^\alpha(\varphi_a; \mathbf{S}^1)$ sogar für jedes $1 \leq p \leq 2$ dicht in $L^p(\mathbf{S}^1)$ liegt. \square

Um zu zeigen, daß (4.3) für ein auf einer Umgebung von $\bar{\mathcal{D}}$ holomorphes f und $h \in C^\alpha(\varphi_a; \mathbf{S}^1)$ lösbar ist, dividieren wir die Randbedingung, zunächst rein formal, durch $|\varphi_1|^2$, $\varphi_1 := f|_{\mathbf{S}^1}$ und erhalten

$$(4.10) \quad \operatorname{Re}(\bar{\varphi}_a g) / |\varphi_1|^2 = \operatorname{Re}(\bar{\varphi}_a / \bar{\varphi}_1 \cdot g / \varphi_1) = h / |\varphi_1|^2.$$

Weil die Nullstellenmengen von φ_a und φ_1 übereinstimmen, hat φ_1 keine Nullstellen innerhalb des Trägers von h . Den Ausdruck auf der rechten Seite in (4.10) werden wir uns daher im folgenden stets durch 0 außerhalb des Trägers von h fortgesetzt denken. In den nächsten beiden Lemmata weisen wir nach, daß die Funktion φ_a / φ_1 auf \mathbf{S}^1 glatt und nullstellenfrei ist. Auf das modifizierte Problem

$$(4.11) \quad \text{Finde } \tilde{g} \in \mathcal{H}^\alpha(\mathcal{D}) \text{ mit } \operatorname{Re}(\bar{\varphi}_a / \bar{\varphi}_1 \tilde{g}) = h / |\varphi_1|^2 \text{ auf } \mathbf{S}^1.$$

können wir daher die Standardtheorie für Hilbertprobleme anwenden. Ist \tilde{g} eine Lösung von (4.11), so erhalten wir mit $g := f\tilde{g}$ offensichtlich eine Lösung des ursprünglichen Problems.

Lemma 4.5. *Es sei $\varphi_1 := f|_{\mathbf{S}^1}$ und \arg die Argumentfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit Werten in $(-\pi, \pi]$. Dann gelten für alle $z \in \mathbf{S}^1 \setminus N(\varphi_a; \mathbf{S}^1)$ die Abschätzungen*

$$(4.12) \quad \min(1, a) \leq |\varphi_a(z) / \varphi_1(z)| \leq \max(1, a),$$

$$(4.13) \quad |\arg(\varphi_a(z) / \varphi_1(z))| \leq \arccos(2\sqrt{a} / (1+a)) < \frac{\pi}{2}.$$

Bew. Ist z wie in der Behauptung und benutzt man $\nu(z)$ und $\tau(z)$ als reelles Koordinatensystem, so ist $\varphi_a(z) = (ax_1, x_2)^T$, falls $\varphi_1(z) = (x_1, x_2)^T$ ist. Daraus ersieht man sofort

$$\begin{aligned} |\varphi_1(z)| &\leq |\varphi_a(z)| \leq a|\varphi_1(z)|, & \text{falls } a \geq 1, \\ \text{und } a|\varphi_1(z)| &\leq |\varphi_a(z)| \leq |\varphi_1(z)|, & \text{falls } a \leq 1. \end{aligned}$$

Das ist die erste Behauptung.

Wir fassen $\nu(z)$ und $\tau(z)$ durch die Identifizierung $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ als komplexe Zahlen auf und definieren

$$\zeta_a(x_1, x_2) := \frac{ax_1\nu(z) + x_2\tau(z)}{x_1\nu(z) + x_2\tau(z)}, \quad (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

und

$$(4.14) \quad \vartheta_a^* := \sup_{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} |\arg(\zeta_a(x_1, x_2))|.$$

Dann ist $|\arg(\varphi_a(z)/\varphi_1(z))| \leq \vartheta_a^*$ klar. Eine einfache Rechnung ergibt

$$(4.15) \quad \operatorname{Re}(\zeta_a(x_1, x_2)) = \frac{ax_1^2 + x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} > 0, \quad (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Weil die Argumentfunktion nur auf der Halbgeraden $\{z \in \mathbb{R} : z \leq 0\}$ unstetig ist, ist $|\arg(\zeta_a)|$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ stetig. Aus der Definition folgt außerdem unmittelbar, daß ζ_a nur vom Winkel zwischen $(x_1, x_2)^T$ und der reellen Achse abhängt. Es reicht daher in (4.14) das Supremum über den Einheitskreis zu bilden. Da stetige Funktionen auf Kompakta ihre Extremwerte annehmen, existiert $(x_1^*, x_2^*)^T$ auf dem Einheitskreis mit

$$\vartheta_a^* = |\arg(\vartheta_a(x_1^*, x_2^*))|.$$

Aus (4.15) folgt $\vartheta_a^* < \frac{\pi}{2}$. Der explizite Ausdruck

$$\vartheta_a^* = \arccos(2\sqrt{a}/(1+a))$$

läßt sich mit Standardmethoden leicht berechnen. □

Lemma 4.6. Für $z \in \mathbf{S}^1 \setminus N(\varphi_a; \mathbf{S}^1)$ sei

$$\psi(z) := \varphi_a(z)/\varphi_1(z).$$

Ist f auf einer Umgebung von $\bar{\mathcal{D}}$ holomorph, so läßt sich ψ zu einer analytischen Funktion ohne Nullstellen auf \mathbf{S}^1 fortsetzen.

Bew. Für den Nachweis der Glattheit von ψ ist nur in den Nullstellen von φ_1 etwas zu zeigen. Da f über den Rand \mathbf{S}^1 hinaus holomorph ist, besitzt $\varphi_1 = f|_{\mathbf{S}^1}$ höchstens endlich viele Nullstellen. Es sei $z_0 \in \mathbf{S}^1$ mit $\varphi_1(z_0) = 0$. Die Funktion φ_a läßt sich auf einer hinreichend kleinen Umgebung von z_0 zu einer holomorphen Funktion fortsetzen. Ist nämlich u die auf einer Umgebung von $\bar{\mathcal{D}}$ harmonische Funktion mit $\nabla u \simeq \bar{f}$ und $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, $B_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$, so besitzt das Cauchy-Problem

$$\text{Finde } v \text{ harmonisch in } B_\varepsilon(z_0) \text{ mit } v = u \text{ und } \frac{\partial v}{\partial \nu} = a \frac{\partial u}{\partial \nu} \text{ auf } \mathbf{S}^1 \cap B_\varepsilon(z_0)$$

nach dem Satz von Cauchy-Kowalewsky eine Lösung. Ist f_+ die durch $\nabla v \simeq \overline{f}_+$ definierte Funktion, so ist nach Konstruktion

$$f_+|_{\mathbf{S}^1 \cap B_\varepsilon(z_0)} = \overline{B_a^{\mathbf{S}^1}(\overline{f}|_{\mathbf{S}^1})}|_{\mathbf{S}^1 \cap B_\varepsilon(z_0)} = \varphi_a|_{\mathbf{S}^1 \cap B_\varepsilon(z_0)}.$$

Also ist φ_a/φ_1 auf $\mathbf{S}^1 \cap B_\varepsilon(z_0)$ die Einschränkung der auf einer Umgebung von z_0 meromorphen Funktion f_+/f . Besäße diese Funktion eine Polstelle in z_0 , so wäre der Betrag von $f_+(z)/f(z)$ für $z \rightarrow z_0$, $z \in \mathbf{S}^1$, $\varphi_1(z) \neq 0$ unbeschränkt im Widerspruch zu (4.12). Die Singularität von f_+/f bei z_0 ist mithin hebbar und φ_a/φ_1 analytisch auf \mathbf{S}^1 .

Wegen der Glattheit von ψ gelten die Abschätzungen des Lemmas 4.5 auch in den Nullstellen von φ_1 . Aus (4.12) folgt jetzt unmittelbar, daß ψ keine Nullstellen hat. \square

Aus (4.13) folgt, daß ψ unter den Voraussetzungen des Lemmas 4.6 den Index 0 hat. Dies benutzt man bei der Lösung des allgemeinen Hilbertproblems, um einen Logarithmus der Randfunktion $-\psi/\overline{\psi}$ zu bilden. Die Abschätzung (4.13) versetzt uns in die Lage, dies auch direkt zu tun. Der Begriff des Index wird also im Beweis von Satz 4.1 nicht gebraucht. Wie im Beweis von Lemma 4.5 sei $\vartheta_a^* := \arccos(2\sqrt{a}/(1+a))$. Mit $\vartheta_a := \pi/2 - \vartheta_a^* > 0$ läßt sich (4.13) zu

$$\arg(\psi) \in [-\pi/2 + \vartheta_a, \pi/2 - \vartheta_a]$$

umschreiben. Weil Quadrieren die Argumente verdoppelt ist

$$\arg(\psi/\overline{\psi}) = \arg(\psi^2/|\psi|^2) = \arg(\psi^2) \in [-\pi + 2\vartheta_a, \pi - 2\vartheta_a].$$

Definiert man eine zweite Argumentfunktion Arg mit Werten in $[0, 2\pi)$, so ist daher

$$\text{Arg}(-\psi/\overline{\psi}) \in [2\vartheta_a, 2\pi - 2\vartheta_a].$$

Es sei Log der zu Arg gehörige Zweig des Logarithmus, das heißt $\text{Log}(z) = \log|z| + i\text{Arg}(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, \log der gewöhnliche reelle Logarithmus. Dann ist

$$\text{Log}(-\psi/\overline{\psi}) : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$$

eine analytische Funktion auf \mathbf{S}^1 . Weil die Werte von $-\psi/\overline{\psi}$ auf dem Einheitskreis liegen, sind die Werte von $\text{Log}(-\psi/\overline{\psi})$ rein imaginär. Für den späteren Gebrauch notieren wir noch

$$(4.16) \quad \frac{1}{i} \text{Log}(-\psi(z)/\overline{\psi}(z)) \in [2\vartheta_a, 2\pi - 2\vartheta_a], \quad z \in \mathbf{S}^1.$$

Es sei

$$A(\phi)(z) := \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbf{S}^1} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z} dz, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \phi \in C^\alpha(\mathbf{S}^1)_{\mathbb{C}},$$

der Cauchy-Integraloperator. Wir sammeln kurz die Eigenschaften von A , die wir im Beweis benötigen.

$A(\phi)$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \mathbf{S}^1$. Die Funktionen $A(\phi)_+ := A(\phi)|_{\mathbb{C} \setminus \bar{\mathcal{D}}}$ und $A(\phi)_- := A(\phi)|_{\mathcal{D}}$ lassen sich zu Funktionen in $C^\alpha(\mathbb{C} \setminus \mathcal{D})_{\mathbb{C}}$ beziehungsweise $C^\alpha(\bar{\mathcal{D}})_{\mathbb{C}}$ auf \mathbf{S}^1 fortsetzen. Es ist $\lim_{|z| \rightarrow \infty} A(\phi)(z) = 0$ gleichmäßig in allen Richtungen. Für $z \in \mathbf{S}^1$ existiert das Integral $A(\phi)(z)$ als Cauchy-Hauptwert und es ist $A(\phi)|_{\mathbf{S}^1} \in C^\alpha(\mathbf{S}^1)_{\mathbb{C}}$. Um Uneindeutigkeiten zu vermeiden, setzen wir

$$\mathbf{A}(\phi) := A(\phi)|_{\mathbf{S}^1}, \quad \phi \in C^\alpha(\mathbf{S}^1)_{\mathbb{C}}.$$

Die Abbildungen

$$C^\alpha(\mathbf{S}^1)_{\mathbb{C}} \rightarrow C^\alpha(\mathbf{S}^1)_{\mathbb{C}}, C^\alpha(\mathbb{C} \setminus \mathcal{D})_{\mathbb{C}}, C^\alpha(\bar{\mathcal{D}})_{\mathbb{C}}, \quad \phi \mapsto \mathbf{A}(\phi), A(\phi)_+, A(\phi)_-$$

sind stetig. Für die Randwerte gelten die Sokhotski-Plemelj-Formeln

$$A(\phi)_- - A(\phi)_+ = 2\phi \quad \text{und} \quad A(\phi)_- + A(\phi)_+ = 2\mathbf{A}(\phi) \quad \text{auf } \mathbf{S}^1.$$

Später im Beweis werden wir auch noch benötigen, daß $\mathbf{A}^2 = \text{Id}_{C^\alpha(\mathbf{S}^1)_{\mathbb{C}}}$ ist und \mathbf{A} sich zu einem stetigen, linearen Operator $L^2(\mathbf{S}^1)_{\mathbb{C}} \rightarrow L^2(\mathbf{S}^1)_{\mathbb{C}}$ erweitern läßt. Beweise für alle diese Aussagen findet man in [23].

Nun können wir Schritt (iii) der Beweisübersicht vollziehen.

Satz 4.7. *Es sei f auf einer Umgebung von $\bar{\mathcal{D}}$ holomorph. Dann ist das Hilbertproblem (4.3) für jedes $h \in C^\alpha(\varphi_a; \mathbf{S}^1)$ lösbar. Eine Lösung g ist durch die Formeln*

$$(4.17a) \quad H(z) := \exp\left(\frac{1}{2}A(\text{Log}(-\psi/\bar{\psi}))\right)(z), \quad z \in \mathbb{C}$$

$$(4.17b) \quad G(z) := \frac{1}{2}H(z) \cdot A(-h/(|\varphi_1|^2\psi H_+))(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

$$(4.17c) \quad \tilde{g}(z) := G_-(z) + \overline{G_+(1/\bar{z})}, \quad z \in \mathcal{D},$$

$$(4.17d) \quad g(z) := f(z)\tilde{g}(z), \quad z \in \mathcal{D}.$$

gegeben.

Bew. Wie bereits erwähnt, lösen wir zunächst das Hilfsproblem

$$\text{Finde } \tilde{g} \in \mathcal{H}^\alpha(\mathcal{D}) \text{ mit } \text{Re}(\bar{\psi}g) = h/|\varphi_1|^2 \text{ auf } \mathbf{S}^1.$$

Die ersten drei Zeilen in (4.17) folgen dem in [24] dargestellten Lösungsweg für ein Hilbertproblem mit Index 0.

Die Sokhotski-Plemelj-Formeln ergeben

$$\frac{1}{2}A(\text{Log}(-\psi/\bar{\psi}))_- - \frac{1}{2}A(\text{Log}(-\psi/\bar{\psi}))_+ = \text{Log}(-\psi/\bar{\psi}), \quad \text{auf } \mathbf{S}^1.$$

Wendet man auf diese Gleichung \exp an, so erkennt man, daß H eine Lösung des homogenen Riemannproblems

$$\bar{\psi}H_- + \psi H_+ = 0 \quad \text{auf } \mathbf{S}^1$$

ist.

Wir setzen zur Abkürzung $\delta := -h/(|\varphi_1|^2\psi H_+)$. Wegen $\exp(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ besitzt H_+ keine Nullstellen. Es sei daran erinnert, daß wir $\delta(z) = 0$ für $z \notin \text{Trg}(h)$ definiert hatten. Es ist daher $\delta \in C^\alpha(\mathbf{S}^1)_{\mathbb{C}}$. Auf \mathbf{S}^1 ist dann

$$\begin{aligned} \bar{\psi}G_- + \psi G_+ &= \frac{1}{2}(\bar{\psi}H_-A(\delta)_- + \psi H_+A(\delta)_+) = \frac{1}{2}\psi H_+(-A(\delta)_- + A(\delta)_+) \\ &= -\psi H_+\delta = h/|\varphi_1|^2. \end{aligned}$$

Wegen $1/z = \bar{z}$, $z \in \mathbf{S}^1$ ist $\overline{G_+(1/\bar{z})} = \overline{G_+(z)}$, $z \in \mathbf{S}^1$, und daraus folgt

$$\begin{aligned} \text{Re}(\bar{\psi}\tilde{g}) &= \text{Re}(\bar{\psi}G_- + \overline{\psi G_+}) = \text{Re}(\bar{\psi}G_- + \psi G_+) \\ &= h/|\varphi_1|^2. \end{aligned}$$

Also erfüllen die Randwerte von g

$$\text{Re}(\bar{\varphi}_a g) = |\varphi_1|^2 \text{Re}(\bar{\psi}\tilde{g}) = h \quad \text{auf } \mathbf{S}^1. \quad \square$$

Wir verzichten jetzt auf die Voraussetzung, daß f in einer Umgebung von $\bar{\mathcal{D}}$ holomorph ist, und verlangen nur noch $f \in \mathcal{H}^\alpha(\mathcal{D})$. Wie in (iv) der Beweisübersicht angekündigt, definieren wir für $0 < r < 1$

$$f_r(z) := f(rz), \quad \varphi_1^{(r)} := f_r|_{\mathbf{S}^1}, \quad \varphi_a^{(r)} := \overline{B_a^{\mathbf{S}^1}(\bar{f}_r|_{\mathbf{S}^1})}, \quad \psi_r := \varphi_a^{(r)}/\varphi_1^{(r)}.$$

Die f_r sind dann auf einer Umgebung von $\bar{\mathcal{D}}$ holomorph und die ψ_r daher analytisch auf \mathbf{S}^1 .

Die Funktion H in (4.17a) ist unabhängig von der rechten Seite h . Es sei

$$H(r; z) := \exp(A(i\phi_r)(z)), \quad z \in \mathbb{C}, \quad \phi_r := \frac{1}{2i} \text{Log}(-\psi_r/\bar{\psi}_r),$$

die entsprechend zu f_r gebildete Funktion. Nach (4.16) haben wir

$$(4.18) \quad \phi_r(z) \in [\vartheta_a, \pi - \vartheta_a], \quad z \in \mathbf{S}^1, \quad 0 < r < 1.$$

Wir untersuchen zunächst die Konvergenz von $H(r; \cdot)$ für $r \rightarrow 1$.

Lemma 4.8. *Ist $J \subset \mathbf{S}^1 \setminus N(\varphi_a; \mathbf{S}^1)$ abgeschlossen und zusammenhängend, so konvergieren die einseitigen Grenzwerte $H(r; \cdot)_\pm|_J$ in $C^\alpha(J)_{\mathbb{C}}$.*

Bew. Ist $\tilde{J} \subset \mathbf{S}^1 \setminus N(\varphi_a; \mathbf{S}^1)$ abgeschlossen und zusammenhängend, so gilt

$$(4.19) \quad (\psi_r/\overline{\psi_r})|_{\tilde{J}} = (\varphi_a^{(r)}/\varphi_1^{(r)} \cdot \overline{\varphi_1^{(r)}/\varphi_a^{(r)}})|_{\tilde{J}} \quad \text{konvergiert für } r \rightarrow 1 \text{ in } C^\alpha(\tilde{J})_{\mathbb{C}}.$$

Für r hinreichend nahe bei 1 besitzen nämlich die Funktionen $\varphi_a^{(r)}$ und $\varphi_1^{(r)}$ auf \tilde{J} keine Nullstellen. Jetzt benutzt man, daß die Multiplikationsabbildung

$$C^\alpha(\tilde{J})_{\mathbb{C}} \times C^\alpha(\tilde{J})_{\mathbb{C}} \rightarrow C^\alpha(\tilde{J})_{\mathbb{C}}$$

und das Bilden der reziproken Funktion

$$\{F \in C^\alpha(\tilde{J})_{\mathbb{C}} : F(z) \neq 0, z \in \tilde{J}\} \rightarrow C^\alpha(\tilde{J})_{\mathbb{C}}$$

stetige Operationen sind.

Weil auch die Anwendung glatter Funktionen $C^\alpha(\tilde{J})_{\mathbb{C}}$ -konvergente Folgen wieder auf $C^\alpha(\tilde{J})_{\mathbb{C}}$ -konvergente Folgen abbildet, folgert man

$$(4.20) \quad \phi_r|_{\tilde{J}} \text{ konvergiert für } r \rightarrow 1 \text{ in } C^\alpha(\tilde{J})_{\mathbb{C}}.$$

Insbesondere konvergiert ϕ_r punktweise außerhalb der Nullmenge $N(\varphi_a; \mathbf{S}^1)$. Aus (4.18) und dem Lebesgueschen Konvergenzsatz schließen wir

$$(4.21) \quad \phi_r \text{ konvergiert für } r \rightarrow 1 \text{ in } L^p(\mathbf{S}^1)_{\mathbb{C}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Ist J wie in der Behauptung, so folgt die $C^\alpha(J)_{\mathbb{C}}$ -Konvergenz von $\mathbf{A}(i\phi_r)|_J$ indem man das Integral geeignet aufspaltet. Dazu wählen wir ein $\tilde{J} \subset \mathbf{S}^1 \setminus N(\varphi_a; \mathbf{S}^1)$, das J im Inneren enthält, und eine reellwertige Funktion $\chi_1 \in C^\alpha(\mathbf{S}^1)$ mit

$$\text{Trg}(\chi_1) \subset \tilde{J}, \quad \chi_1 \geq 0 \quad \text{und} \quad \chi_1 = 1 \text{ auf einer Umgebung von } J.$$

Setzt man $\chi_2 = 1 - \chi_1$, so ist

$$\mathbf{A}(i\phi_r) = \mathbf{A}(i\chi_1\phi_r) + \mathbf{A}(i\chi_2\phi_r).$$

Weil ϕ_r noch C^α -konvergent auf einer Umgebung von \tilde{J} ist, konvergiert $\chi_1\phi_r$, und dann auch $\mathbf{A}(i\chi_1\phi_r)_{\mathbb{C}}$, für $r \rightarrow 1$ in $C^\alpha(\mathbf{S}^1)_{\mathbb{C}}$. Die Dichten $\chi_2\phi_r$ des zweiten Integrals verschwinden auf einer Umgebung von J und konvergieren nach (4.21) in $L^1(\mathbf{S}^1)_{\mathbb{C}}$. Daher konvergiert $\mathbf{A}(i\chi_2\phi_r)$ für $r \rightarrow 1$ gleichmäßig inklusive aller Ableitungen auf J . Damit haben wir

$$\mathbf{A}(i\phi_r)|_J \text{ konvergiert für } r \rightarrow 1 \text{ in } C^\alpha(J)_{\mathbb{C}}$$

bewiesen.

Nach den Sokhotski-Plemlj-Formeln ist $A(i\phi_r)_\pm = \mathbf{A}(i\phi_r) \mp i\phi_r$ auf \mathbf{S}^1 . Mit (4.20) ergibt sich jetzt auch die $C^\alpha(J)_{\mathbb{C}}$ -Konvergenz der einseitigen Grenzwerte $A(i\phi_r)_\pm|_J$. Weil die Anwendung von \exp die $C^\alpha(J)_{\mathbb{C}}$ -Konvergenz erhält, folgt die Behauptung. \square

Die eigentliche Schwierigkeit in Teil (iv) der Beweisübersicht ist der Nachweis, daß die Randwerte $H(r; \cdot)_\pm$ für $r \rightarrow 1$ gleichmäßig $L^1(\mathbf{S}^1)_\mathbb{C}$ -beschränkt sind. Ließe sich \mathbf{A} zu einem Endomorphismus von $L^\infty(\mathbf{S}^1)$ erweitern, so wäre man mit (4.18) sofort am Ziel. Es ist aber bekannt, daß $\mathbf{A}(\phi)$ für stetige, aber nicht Hölder-stetige Dichten ϕ unbeschränkte Singularitäten haben kann. Insbesondere ist also $\mathbf{A}(L^\infty(\mathbf{S}^1)) \not\subset L^\infty(\mathbf{S}^1)$. Nach (4.21) konvergiert ϕ_r , und dann auch $\mathbf{A}(i\phi_r)$ und $A(i\phi_r)_\pm$, in $L^2(\mathbf{S}^1)_\mathbb{C}$. Wir benötigen also eine Aussage, daß die eventuell vorhandenen Singularitäten von $\lim_{r \rightarrow 1} \mathbf{A}(i\phi_r)$ in den Punkten aus $N(\varphi_a; \mathbf{S}^1)$ so schwach sind, daß $\exp(\mathbf{A}(i\phi_r))$ für $r \rightarrow 1$ noch $L^1(\mathbf{S}^1)_\mathbb{C}$ -beschränkt bleibt. Dies leistet der nächste Satz. Der Beweis ist [30], Hilfssatz 2 entnommen.

Satz 4.9. *Es sei $\phi \in C^\alpha(\mathbf{S}^1)$ mit $\phi(z) \in [\vartheta, \pi - \vartheta]$ für alle $z \in \mathbf{S}^1$ mit $0 < \vartheta < \pi/2$. Dann ist*

$$\|\exp(\mathbf{A}(i\phi))\|_{L^1(\mathbf{S}^1)_\mathbb{C}} \leq e^{\|\operatorname{Re}(\mathbf{A}(i\phi))\|_{L^1(\mathbf{S}^1)}} / \sin \vartheta.$$

Hierbei ist $\|F\|_{L^1(\mathbf{S}^1)_\mathbb{C}} := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(t)| dt$, $F \in L^1(\mathbf{S}^1)_\mathbb{C}$ definiert, das heißt wir verwenden das durch $\int_{\mathbf{S}^1} ds = 1$ normierte Maß bei der Definition von $\|\cdot\|_{L^1(\mathbf{S}^1)_\mathbb{C}}$.

Bew. Es ist klar, daß es ausreicht, die Abschätzung für $\|\exp(\tilde{\phi})\|_{L^1(\mathbf{S}^1)}$ mit $\tilde{\phi} := \operatorname{Re}(\mathbf{A}(i\phi))$ zu zeigen. Im folgenden identifizieren wir Funktionen aus $C^\alpha(\mathbf{S}^1)_\mathbb{C}$ mit solchen aus $C^\alpha(\mathbb{R}/2\pi)_\mathbb{C}$ mittels der Parametrisierung $t \mapsto e^{it}$.

Auf dem Einheitskreis hat der Cauchy-Integraloperator die Darstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\delta)(z) &= \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbf{S}^1} \frac{\delta(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \left(\cot \frac{\tau - t}{2} + i \right) \delta(\tau) d\tau, \quad \delta \in C^\alpha(\mathbf{S}^1)_\mathbb{C}, z = e^{it}. \end{aligned}$$

Daher ist $\mathbf{A}(i\phi) = \tilde{\phi} + ic_\phi \mathbb{1}_{\mathbf{S}^1}$ mit $c_\phi := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(\tau) d\tau$. Zusammen mit den Formeln $\mathbf{A}^2 = \operatorname{Id}_{\mathbf{S}^1}$, $\mathbf{A}(\mathbb{1}_{\mathbf{S}^1}) = \mathbb{1}_{\mathbf{S}^1}$ und $\tilde{\phi} = \mathbf{A}(i\phi) - i \operatorname{Im}(\mathbf{A}(i\phi)) = \mathbf{A}(i\phi) - ic_\phi \mathbb{1}_{\mathbf{S}^1}$ folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\tilde{\phi} + i\phi) &= \mathbf{A}(\mathbf{A}(i\phi) - ic_\phi \mathbb{1}_{\mathbf{S}^1}) + \tilde{\phi} + ic_\phi \mathbb{1}_{\mathbf{S}^1} \\ &= i\phi + \tilde{\phi}. \end{aligned}$$

Aus den Sokhotski-Plemelj-Formeln folgt daher, daß die holomorphe Funktion

$$g(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{S}^1} \frac{\tilde{\phi}(\zeta) + i\phi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2} \mathbf{A}(\tilde{\phi} + i\phi)(z), \quad z \in \mathcal{D},$$

die Randwerte $g_- = \tilde{\phi} + i\phi$ hat. Also ist $e^g \in \mathcal{H}^\alpha(\mathcal{D})$ mit Randwerten $e^{\tilde{\phi} + i\phi}$. Die Cauchysche Integralformel für diese Funktion ergibt

$$(4.22) \quad e^{g(0)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{S}^1} e^{(\tilde{\phi} + i\phi)(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\tilde{\phi}(\tau) + i\phi(\tau)} d\tau.$$

Geht man in dieser Gleichung zu den Imaginärteilen über, so erhält man

$$\operatorname{Im}(e^{g(0)}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\tilde{\phi}(\tau)} \sin(\phi(\tau)) d\tau.$$

Natürlich ist $e^{\tilde{\phi}(\tau)} > 0$, und die Voraussetzung $\phi(\tau) \in [\vartheta, \pi - \vartheta]$ impliziert $\sin(\phi(\tau)) \geq \sin \vartheta > 0$. Also gilt

$$\operatorname{Im}(e^{g(0)}) / \sin \vartheta \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\tilde{\phi}(\tau)} d\tau = \|\exp \tilde{\phi}\|_{L^1(\mathbf{S}^1)_{\mathbb{C}}} \geq 0.$$

Benutzt man auf der linken Seite noch die Abschätzung

$$\operatorname{Im}(e^{g(0)}) \leq |e^{g(0)}| = e^{\operatorname{Re} g(0)} = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{\phi}(\tau) d\tau\right) \leq e^{\|\tilde{\phi}\|_{L^1(\mathbf{S}^1)}},$$

so folgt die Behauptung. \square

Wir wollen noch zwei Bemerkungen zu diesem Satz anschließen. Der Satz bleibt richtig, wenn die Werte von ϕ in einem beliebigem Intervall mit einer Länge echt kleiner π enthalten sind. Ist $\phi(z) \in \theta + [\vartheta, \pi - \vartheta]$ für alle $z \in \mathbf{S}^1$ und ein $\theta \in [0, 2\pi)$, so multipliziert man die Gleichung (4.22) einfach mit $e^{-i\theta}$ und der Beweis kann unverändert übernommen werden.

Ist $1 \leq p < \pi/(\pi - 2\vartheta)$ so ist auch noch das Intervall $[p\vartheta, p(\pi - \vartheta)]$ echt kleiner π . Ganz analog zu (4.22) leitet man die Formel

$$e^{pg(0)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{p\tilde{\phi}(\tau) + ip\phi(\tau)} d\tau$$

her. Verfährt man jetzt genau wie im obigem Beweis weiter, so erhält man eine Abschätzung

$$\|\exp(\mathbf{A}(i\phi))\|_{L^p(\mathbf{S}^1)_{\mathbb{C}}} \leq C e^{\|\operatorname{Re}(\mathbf{A}(i\phi))\|_{L^1(\mathbf{S}^1)}}$$

mit einer nur von ϑ abhängigen Konstante $C > 0$. Zusammen mit der Bemerkung am Ende des Beweises von Lemma 4.4 kann man damit zeigen, daß die Dichtheitsaussage aus Satz 4.1 sogar in $L^p(\partial D)$, $p < p^*$ mit einem nur von a abhängigem $1 < p^* \leq 2$ richtig ist. Weil dies für den Beweis von Korollar 4.2 nicht benötigt wurde, haben wir auf die Formulierung dieses etwas stärkeren Ergebnisses in Satz 4.1 verzichtet.

Jetzt ist es leicht, die angekündigte Beschränktheit von H_{\pm} zu beweisen.

Korollar 4.10. Die Randwerte $H(r; \cdot)_{\pm}$ sind für $r \rightarrow 1$ gleichmäßig in $L^1(\mathbf{S}^1)_{\mathbb{C}}$ beschränkt

Bew. Aus Satz 4.9 erhalten wir mit (4.18)

$$(4.23) \quad \|H(r; \cdot)\|_{L^1(\mathbf{S}^1)_{\mathbb{C}}} \leq e^{\|\operatorname{Re}(\mathbf{A}(i\phi_r))\|_{L^1(\mathbf{S}^1)}} / \sin \vartheta_a.$$

In (4.21) hatten wir bereits gezeigt, daß ϕ_r , also auch $\mathbf{A}(i\phi_r)$, für $r \rightarrow 1$ in $L^2(\mathbf{S}^1)_{\mathbb{C}}$ konvergiert. Weil L^2 -Konvergenz auf Kompakta stärker als L^1 -Konvergenz ist, konvergiert die rechte Seite in (4.23) für $r \rightarrow 1$. Somit ist $H(r; \cdot)|_{\mathbf{S}^1}$ für $r \rightarrow 1$ $L^1(\mathbf{S}^1)_{\mathbb{C}}$ -beschränkt. Weil die ϕ_r reellwertig sind, folgt die Behauptung jetzt aus

$$H(r; \cdot)_{\pm} = \exp(\mathbf{A}(i\phi_r) \mp i\phi_r) = H(r; \cdot)|_{\mathbf{S}^1} e^{\mp i\phi_r} \quad \text{auf } \mathbf{S}^1. \quad \square$$

Es sei jetzt $h \in C^\alpha(\varphi_a; \mathbf{S}^1)$ gegeben. Es sei $J \subset \mathbf{S}^1 \setminus N(\varphi_a; \mathbf{S}^1)$ abgeschlossen und zusammenhängend mit $\text{Trg}(h) \subset J$. Wir hatten bereits in der Beweisübersicht argumentiert, daß $h \in C^\alpha(\varphi_a^{(r)}; \mathbf{S}^1)$ für r hinreichend nahe bei 1 gilt. Wir definieren für diese r die Funktionen $G(r; \cdot)$, \tilde{g}_r und g_r indem wir in (4.17b)–(4.17c) φ_a und φ_1 durch $\varphi_a^{(r)}$ beziehungsweise $\varphi_1^{(r)}$ ersetzen. Die L^1 -Beschränktheit der $g_r|_{\mathbf{S}^1}$ ist nun einfach nachzuprüfen.

Setzen wir zur Abkürzung

$$\delta_r := -h / (|\varphi_1^{(r)}|^2 \psi_r H(r; \cdot)_+) = -h / (\varphi_a^{(r)} \overline{\varphi_1^{(r)}} H(r; \cdot)_+),$$

so konvergiert δ_r für $r \rightarrow 1$ in $C^\alpha(\mathbf{S}^1)_{\mathbb{C}}$. Aus Lemma 4.8 folgt nämlich, daß $\varphi_a^{(r)} \overline{\varphi_1^{(r)}} H(r; \cdot)_+$ noch C^α -konvergent auf einer Umgebung des Trägers von h ist. Da wir δ_r außerhalb des Trägers durch 0 fortgesetzt hatten, folgt die behauptete Konvergenz von δ_r . Also konvergiert auch $\mathbf{A}(\delta_r)$ in $C^\alpha(\mathbf{S}^1)_{\mathbb{C}}$. Die einseitigen Grenzwerte von $G(r; \cdot)$ sind gegeben durch

$$G(r; z)_{\pm} = \frac{1}{2} H(r; z)_{\pm} \cdot (\mathbf{A}(\delta_r)(z) \mp \delta_r(z)), \quad z \in \mathbf{S}^1.$$

Wegen

$$\|F_1 F_2\|_{L^1(\mathbf{S}^1)_{\mathbb{C}}} \leq \|F_1\|_{L^1(\mathbf{S}^1)_{\mathbb{C}}} \|F_2\|_{L^\infty(\mathbf{S}^1)_{\mathbb{C}}}, \quad F_1 \in L^1(\mathbf{S}^1)_{\mathbb{C}}, \quad F_2 \in L^\infty(\mathbf{S}^1)_{\mathbb{C}},$$

sind die $G(r; \cdot)_{\pm}|_{\mathbf{S}^1}$ also $L^1(\mathbf{S}^1)_{\mathbb{C}}$ -beschränkt für $r \rightarrow 1$.

Aus

$$\tilde{g}_r|_{\mathbf{S}^1} = G(r; \cdot)_-|_{\mathbf{S}^1} + \overline{G(r; \cdot)_+}|_{\mathbf{S}^1} \quad \text{und} \quad g_r = f_r \tilde{g}_r$$

liest man jetzt direkt ab, daß $\tilde{g}_r|_{\mathbf{S}^1}$ und $g_r|_{\mathbf{S}^1}$ für $r \rightarrow 1$ in $L^1(\mathbf{S}^1)_{\mathbb{C}}$ -beschränkt sind.

Nach den Bemerkungen in (iv) der Beweisübersicht ist damit Satz 4.1 vollständig bewiesen.

4.1.3 Literaturübersicht

Der Satz 3.5 ist in [4] aus der schwachen Formulierung des Randwertproblems ohne die Charakterisierung der Gebietsableitung hergeleitet worden. In [5] ist dieser Satz auf Gebiete mit stückweise glattem Rand erweitert worden. Leider ist er im letztgenannten Text nicht richtig formuliert. In diesen beiden Arbeiten ist auch die Injektivität der Gebietsableitung untersucht worden. Im ersten Text

wird $\mathcal{L}^*(D, a, I; Z) \neq 0$ gezeigt, falls die Normalenkomponente von Z auf ganz ∂D positiv beziehungsweise negativ ist. Außerdem wird gezeigt, daß die Ableitung nicht verschwindet, wenn die Normalenkomponente von Z auf einer offenen Teilmenge von ∂D , aber nicht auf ganz ∂D , verschwindet. Beide Aussagen lassen sich ohne Betrachtung des Hilbertproblems (4.3) gewinnen. Insbesondere gelten diese Aussagen auch im dreidimensionalen Fall. Für die weiteren Untersuchungen beschränken sich beide Texte auf den \mathbb{R}^2 und eine analytische Randkurve ∂D . Aus den allgemeinen Regularitätsaussagen für elliptische partielle Differentialgleichungen folgt dann, daß sich das Potential u_- harmonisch in eine Umgebung von \bar{D} fortsetzen läßt. Der Gradient von u_- besitzt daher höchstens endlich viele Nullstellen auf ∂D . In [4] wird vorgeschlagen, daß Problem der Nullstellen von φ_a dadurch zu umgehen, daß man ein geeignetes Hilfsproblem, nämlich das Hilbertproblem mit dem modifiziertem Koeffizienten $\varphi_a/|\varphi_a|$, betrachtet. Kann man die Lösbarkeit dieses Problems für jede Inhomogenität $h \in C^\alpha(\partial D)$ nachweisen, so läßt sich immer noch die Injektivität von $\mathcal{L}^*(D, a, I; \cdot)$ ableiten. Statt der Nullstellen von φ_a bereiten jetzt die Unstetigkeiten von $\varphi_a/|\varphi_a|$ Schwierigkeiten. Auch für das Hilbertproblem mit unstetigem Koeffizienten existiert eine Lösungstheorie, aber ein Schluß wie in (4.4) auf den Index des Hilbertproblems läßt sich nicht auf $\varphi_a/|\varphi_a|$ übertragen. Daher ist die Lösbarkeit des Hilfsproblems bei gegebener Inhomogenität im allgemeinen nicht gesichert. In [4] erhält man auf diesem Weg noch die Aussage, daß der Kern von $\mathcal{L}^*(D, a, I; \cdot)$ endlichdimensional ist.

In der Gleichung (4.4) ist benutzt worden, daß für eine in Ω holomorphe Funktion f mit nullstellenfreien Randwerten der Index von $f|_{\partial\Omega}$ gleich der Anzahl der Nullstellen von f in D ist. In [5] wird für eine analytische Randkurve ∂D gezeigt, daß sich diese Beziehung auf die stückweise holomorphe Funktion f_u mit

$$\bar{f}_u = \begin{cases} \nabla u_+, & \text{auf } \Omega \setminus D \\ \nabla u_-, & \text{auf } D \end{cases}, \quad u = \mathcal{L}(\chi_{\Omega \setminus D} + a\chi_D; I)$$

übertragen läßt. Falls $\text{Ind}(f_u|_{\partial\Omega}) = 0$ gilt, folgt dann $\nabla u_+ \neq 0$ in $\bar{\Omega} \setminus D$, $\varphi_a \neq 0$ auf ∂D und mit (4.4) die Injektivität von $\mathcal{L}^*(D, a, I; \cdot)$. Um $\text{Ind}(f_u|_{\partial\Omega}) = 0$ zu sichern, wird zunächst ein Transmissionsproblem zu D mit geeignet vorgeschriebenen Dirichlet-Randdaten auf $\partial\Omega$ gelöst. Die Neumann-Randdaten der Lösung auf $\partial\Omega$ werden dann als Einspeisestrom benutzt. Um eine geeignete Einspeisung zu bestimmen, muß man also schon Informationen über D besitzen, aber immerhin nur solche, die sich durch Messungen auf dem Rand $\partial\Omega$ ergeben. Als allgemeine Aussage ergibt sich aber lediglich, daß bei gegebenem D eine von Z unabhängige Einspeisungen I existiert, so daß $\mathcal{L}^*(D, a, I; \cdot)$ injektiv ist.

In [29] wird diese Idee weiter ausgebaut und gezeigt, daß für gewisse Einspeisungen $\nabla u_+ \neq 0$ in Ω unabhängig vom Gebiet D sichergestellt werden kann. Für solche Einspeisungen wird ein lokales Eindeutigkeitsresultat für das inverse Problem bewiesen. Nach dem obigen Schluß folgt für diese Einspeisungen auch die Injektivität der Gebietsableitung bei jedem Gebiet D .

In [2] werden die Ergebnisse der letztgenannten Arbeit auf eine etwas größere Klasse von Einspeisungen und $C^{1,\alpha}$ -glatt berandetes D verallgemeinert.

Globale Eindeutigkeitsaussagen für spezielle Gebiete, zum Beispiel Polygone und Kreise, findet man in [12], [20].

4.2 Ein negatives Resultat für ein vereinfachtes Problem

Es seien wieder $\Omega, D \subset \mathbb{R}^2$ offen, beschränkt und C^2 -glatt berandet, $\bar{D} \subset \Omega$ und $I \in C_*(\partial\Omega)$. Ω sei einfach zusammenhängend. In (3.25) hatten wir den Operator $\mathcal{L}_h(D; I)$ durch Linearisierung bezüglich der Leitfähigkeit definiert. Es sei

$$u'_D := \mathcal{L}_h(D; I).$$

Für a nahe bei 1 können wir das Potential $\mathcal{L}(D, a; I)$ nach (3.21) durch $u_I + (a - 1)u'_D$ approximieren. Da u_I aus I und Ω berechenbar ist und wir a wieder als bekannt voraussetzen, lautet das zugehörige inverse Problem

$$(4.24) \quad \text{Bestimme } D \text{ aus dem Randpotential } u'_D|_{\partial\Omega}.$$

Wir werden zeigen, daß dieses Problem für gewisse Einspeisungen äquivalent zum inversen Quellproblem ist. Dieses Problem besteht darin, ein beschränktes Gebiet $E \subset \mathbb{R}^2$ zu rekonstruieren, wenn sein Newton-Potential

$$(4.25) \quad v_E(x) := \int_E \Phi(x, y) dy \quad (\Phi \text{ Grundleistung des Laplace-Operators}),$$

auf einer Teilmenge der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^2 \setminus E$ bekannt ist.

Ähnlich wie das in Satz 3.6 für die Gebietsableitung geschehen ist, formulieren wir zunächst die Eindeutigkeitsaussage um. Für eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ sei

$$\mathcal{P}(U) := \{f \in C^2(U) : \Delta f = 0\}.$$

Satz 4.11. *Es seien D_1, D_2 offen und C^2 -glatt berandet mit $\bar{D}_1, \bar{D}_2 \subset \Omega$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

- (i) *Es gilt $u'_{D_1}|_{\partial\Omega} = u'_{D_2}|_{\partial\Omega}$.*
- (ii) *Es existiert eine einfach zusammenhängende Umgebung U von $\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2$, $U \subset \Omega$, so daß*

$$(4.26) \quad \forall w \in \mathcal{P}(U) : \int_{D_1} \langle \nabla w, \nabla u_I \rangle dx = \int_{D_2} \langle \nabla w, \nabla u_I \rangle dx.$$

- (iii) *Die Gleichung (4.26) gilt für jedes w , das auf einer einfach zusammenhängenden Umgebung von $\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2$ harmonisch ist.*

Bew. Es sei U eine offene, beschränkte, einfach zusammenhängende und C^2 -glatt berandete Obermenge von $\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2$ mit $\bar{U} \subset \Omega$. Es sei G die durch (3.22) definierte Greensche Funktion von Ω . Für $\varphi \in C(\partial U)$ definieren wir das Einzelschichtpotential

$$(4.27) \quad w_\varphi(x) := \int_{\partial U} G(x, y) \varphi(y) ds(y).$$

Dann ist für $j = 1, 2$

$$\begin{aligned} \int_{D_j} \langle \nabla w_\varphi, \nabla u_I \rangle dx &= \int_{D_j} \left\langle \int_{\partial U} \nabla_x G(x, y) \varphi(y) ds(y), \nabla u_I(x) \right\rangle dx \\ &= \int_{\partial U} \left(\int_{D_j} \langle \nabla_x G(x, y), \nabla u_I(x) \rangle dx \right) \cdot \varphi(y) ds(y) \\ &= \int_{\partial U} \left(\int_{\partial D_j} G(x, y) \frac{\partial u_I}{\partial \nu}(x) ds(x) \right) \cdot \varphi(y) ds(y). \end{aligned}$$

Aus $G(x, y) = G(y, x)$ und der Darstellung (3.23) von u'_{D_j} folgt

$$(4.28) \quad \int_{D_j} \langle \nabla w_\varphi, \nabla u_I \rangle dx = - \int_{\partial U} u'_{D_j} \varphi ds, \quad j = 1, 2.$$

Es sei (i) erfüllt. Wir zeigen (iii). Es sei w auf einer einfach zusammenhängenden Umgebung U von $\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2$ harmonisch. Indem wir U eventuell verkleinern dürfen wir annehmen, daß U einen C^2 -glatten Rand hat und $\bar{U} \subset \Omega$, $w \in C^1(\bar{U})$ gilt. Aus (i) und $\partial u'_{D_j} / \partial \nu = 0$ auf $\partial \Omega$ folgt $u'_{D_1}|_{\partial U} = u'_{D_2}|_{\partial U}$ aus dem Holmgrenschen Eindeutigkeitssatz, denn ∂U liegt ganz in der Zusammenhangskomponente von $\bar{\Omega} \setminus (\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2)$, die $\partial \Omega$ enthält. Hier geht ein, daß U einfach zusammenhängend ist. Kann man zeigen, daß $\nabla w = \nabla w_\varphi$ mit einem geeigneten $\varphi \in C(\partial U)$ gilt, so folgt die Behauptung aus (4.28). Es ist bekannt, daß sich das innere Neumannsche Randwertproblem des Laplace-Operators zu den Randdaten $\partial w / \partial \nu$ auf ∂U durch ein Einzelschichtpotential lösen läßt. Weil sich Φ und G bloß um eine in $\Omega \times \Omega$ analytische Funktion voneinander unterscheiden, kann man bei der Lösung des Neumannproblems auch Φ durch G ersetzen. Daher existiert $\varphi \in C(\partial U)$ mit $\partial w_\varphi / \partial \nu = \partial w / \partial \nu$ auf ∂U . Aus der Eindeutigkeit des Neumann-Problems folgt jetzt, daß w und w_φ sich nur durch eine additive Konstante unterscheiden. Die Gradienten von w und w_φ stimmen also überein.

Ist (ii) erfüllt, so gilt (4.26) insbesondere für $U = \Omega$. Für alle $\varphi \in C(\partial \Omega)$ ist daher nach (4.28)

$$\int_{\partial \Omega} (u'_{D_1} - u'_{D_2}) \varphi ds = 0,$$

und somit ist $u'_{D_1}|_{\partial \Omega} = u'_{D_2}|_{\partial \Omega}$. □

Eine ähnliche Aussage läßt sich auch für das inverse Quellproblem machen.

Satz 4.12. *Es seien $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^2$ offen, beschränkt und C^2 -glatt berandet. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

- (i) *Es ist $v_{E_1} = v_{E_2}$ auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^2 \setminus (\bar{E}_1 \cup \bar{E}_2)$.*

(ii) Es existiert eine beschränkte, einfach zusammenhängende Umgebung U von $\bar{E}_1 \cup \bar{E}_2$, so daß

$$(4.29) \quad \forall w \in \mathcal{P}(U) : \int_{E_1} w \, dx = \int_{E_2} w \, dx.$$

(iii) Die Gleichung (4.29) gilt für jedes w , das auf einer einfach zusammenhängenden Umgebung von $\bar{E}_1 \cup \bar{E}_2$ harmonisch ist.

Bew. Ist U eine C^2 -glatt berandete, offene, einfach zusammenhängende Umgebung von $\bar{E}_1 \cup \bar{E}_2$, so definieren wir für $\varphi \in C(\partial U)$

$$w_\varphi(x) := \int_{\partial U} \Phi(x, y) \varphi(x, y) \, ds(y).$$

Genau wie im Beweis des vorhergehenden Satzes beweist man für $j = 1, 2$

$$\int_{E_j} w_\varphi \, dx = \int_{\partial U} v_{E_j} \varphi \, ds.$$

Der Beweis verläuft jetzt genauso wie der von Satz 4.11. \square

Jetzt können wir die Äquivalenz der beiden inversen Probleme zeigen. Wir benutzen wie in Abschnitt 4.1 die Identifizierung $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$. Zu jedem u_I gibt es eine in Ω holomorphe Funktion ϕ mit $\operatorname{Re}(\phi) = u_I$ und ϕ ist durch u_I bis auf eine rein imaginäre, additive Konstante eindeutig bestimmt.

Satz 4.13. *Es sei $\phi \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $\operatorname{Re}(\phi) = u_I$, $\phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^2$ sei offen und $\phi : \Omega \rightarrow \phi(\Omega)$ sei ein reeller Diffeomorphismus. Es seien D_1, D_2 offen, C^2 -glatt berandet mit $\bar{D}_1, \bar{D}_2 \subset \Omega$. Setzt man $E_j := \phi(D_j)$, $j = 1, 2$, so sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) Es gilt $u'_{D_1}|_{\partial\Omega} = u'_{D_2}|_{\partial\Omega}$.

(ii) Es gilt $v_{E_1} = v_{E_2}$ auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^2 \setminus (\bar{E}_1 \cup \bar{E}_2)$.

Bew. Es sei U eine offene, einfach zusammenhängende Umgebung von $\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2$. Nach Satz 4.11 ist (i) äquivalent zu

$$(4.30) \quad \forall w \in \mathcal{P}(U) : \int_{D_1} \langle \nabla w, \nabla u_I \rangle \, dx = \int_{D_2} \langle \nabla w, \nabla u_I \rangle.$$

Es seien f_{u_I}, f_w die holomorphen Funktionen mit $\bar{f}_{u_I} \simeq \nabla u_I$ und $\bar{f}_w \simeq \nabla w$. Durchläuft w alle Funktionen in $\mathcal{P}(U)$, so durchläuft f_w alle Funktionen in $\mathcal{H}(U)$. Daher ist (4.30) äquivalent zu

$$(4.31) \quad \forall f \in \mathcal{H}(U) : \int_{D_1} \operatorname{Re}(\bar{f}_{u_I} f) \, dx = \int_{D_2} \operatorname{Re}(\bar{f}_{u_I} f) \, dx.$$

Weil ϕ nach Voraussetzung ein Diffeomorphismus ist, ist $\det D\phi = |\nabla u_I|^2 \neq 0$. Daher ist die Abbildung $f \mapsto f_{u_I} \cdot f$ eine Bijektion von $\mathcal{H}(U)$ auf sich selbst. Ersetzt man in (4.31) f durch $f f_{u_I}$, so ist diese Gleichung, wegen $|f_{u_I}|^2 = |\nabla u_I|^2 = \det D\phi$, äquivalent zu

$$(4.32) \quad \forall f \in \mathcal{H}(U) : \int_{D_1} \operatorname{Re}(f) \det D\phi \, dx = \int_{D_2} \operatorname{Re}(f) \det D\phi \, dx.$$

Es sei $\tilde{U} := \phi(U)$. Da ϕ holomorph ist, ist ϕ^{-1} ebenfalls holomorph und daher $\phi^* : \mathcal{H}(\tilde{U}) \rightarrow \mathcal{H}(U)$, $f \mapsto f \circ \phi$ eine Bijektion. Somit ist (4.32) äquivalent zu

$$(4.33) \quad \forall f \in \mathcal{H}(\tilde{U}) : \int_{D_1} \operatorname{Re}(f \circ \phi) \det D\phi \, dx = \int_{D_2} \operatorname{Re}(f \circ \phi) \det D\phi \, dx.$$

Benutzt man jetzt auf beiden Seiten die Transformationsformel, so ist (4.33) schließlich äquivalent zu

$$(4.34) \quad \forall f \in \mathcal{H}(\tilde{U}) : \int_{E_1} \operatorname{Re}(f) \, dx = \int_{E_2} \operatorname{Re}(f) \, dx.$$

Nun ist \tilde{U} einfach zusammenhängend und daher

$$\{\operatorname{Re}(f) : f \in \mathcal{H}(\tilde{U})\} = \mathcal{P}(\tilde{U}).$$

Nach Satz 4.12 ist die Gleichung (4.34) also äquivalent zu (ii). \square

In der Praxis wird der Strom I oft durch Elektrodenpaare eingespeist, deren Oberfläche im Verhältnis zu $\partial\Omega$ klein ist. Solche Einspeiseströme lassen sich durch Punkteinspeisungen gut approximieren. Ist $\Omega = \mathcal{D}$ der Einheitskreis, so ist das Potential u_I bei Einspeisung in den Punkten $p_1, p_2 \in \mathbf{S}^1$, $p_1 \neq p_2$ bis auf Normierung gegeben durch

$$(4.35) \quad u_I^{(1)}(x) = \ln \frac{1}{|x - p_1|} - \ln \frac{1}{|x - p_2|}, \quad x \in \mathcal{D}.$$

Liegen die Elektroden dicht beisammen, so ist auch die Dipoleinspeisung

$$(4.36) \quad u_I^{(2)}(x) = \frac{\langle x - p_3, \tau_{\mathcal{D}}(p_3) \rangle}{|x - p_3|^2}, \quad p_3 \in \mathbf{S}^1, x \in \mathcal{D}$$

eine akzeptable Näherung. Wir wollen überprüfen, daß für diese Einspeisungen die Voraussetzungen von Satz 4.13 erfüllt sind.

Eine einfache Rechnung zeigt, daß für $p = e^{i\theta} \in \mathbf{S}^1$ die Abbildung

$$z \mapsto (z - p)^{-1}$$

den Einheitskreis biholomorph auf die Halbebene

$$\mathbb{H}_\theta := \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\zeta e^{i\theta}) < -1/2\}$$

abbildet. Die inverse Abbildung ist durch $\zeta \mapsto (p\zeta + 1)/\zeta$ gegeben. Aus

$$\overline{1/(z - p_3)} = (x - p_3)/|x - p_3|^2, \quad z := x_1 + ix_2 \quad \text{und} \quad \tau_{\mathcal{D}}(p_3) = ip_3$$

folgt für die Dipoleinspeisung

$$u_I^{(2)}(z) = \operatorname{Re}(\phi^{(2)}(z)), \quad \phi^{(2)} := \frac{ip_3}{z - p_3}.$$

Nach dem gerade gesagten ist klar, daß $\phi^{(2)}$ die Kreisscheibe diffeomorph auf $\phi^{(2)}(\mathcal{D})$ abbildet.

Ist $p_1 = e^{i\theta_1}$, $p_2 = e^{i\theta_2}$, so ist offensichtlich, daß wir stets einen Halbstrahl $g_\vartheta := \{te^{i\vartheta}, t \geq 0\}$ finden können, der außerhalb des Abschlusses von $\mathbb{H}_{\theta_1} \cup \mathbb{H}_{\theta_2}$ liegt. Schlitzt man die komplexe Ebene entlang g_ϑ auf und wählt einen zugehörigen komplexen Logarithmus \log , so ist

$$u_I^{(1)}(z) = \operatorname{Re}(\phi^{(1)}(z)), \quad \phi^{(1)}(z) := \log \frac{1}{z - p_1} - \log \frac{1}{z - p_2}.$$

Ist $\phi^{(1)}(z_1) = \phi^{(1)}(z_2)$, $z_1, z_2 \in \mathcal{D}$, so folgt durch Anwendung von \exp

$$\frac{z_1 - p_2}{z_1 - p_1} = \frac{z_2 - p_2}{z_2 - p_1}.$$

Die Abbildung $z \mapsto (z - p_2)/(z - p_1)$, $z \neq p_1$ hat die Inverse $\zeta \mapsto (\alpha\zeta + \beta)/(\gamma\zeta + \delta)$, $\gamma\zeta + \delta \neq 0$ mit $\alpha := -p_1/(p_2 - p_1)$, $\beta := p_2/(p_2 - p_1)$, $\gamma := -1/(p_2 - p_1)$, $\delta = 1/(p_2 - p_1)$. Aus der obigen Gleichung folgt also die Injektivität von $\phi^{(1)}$ auf \mathcal{D} . Eine holomorphe Abbildung einer offenen Menge in \mathbb{C} ist genau dann regulär, wenn sie lokal injektiv ist (siehe zum Beispiel [11], Kapitel VI, Folgerung zu Satz 7.2). Also ist $\phi^{(1)}$ regulär und bildet \mathcal{D} diffeomorph auf $\phi^{(1)}(\mathcal{D})$ ab.

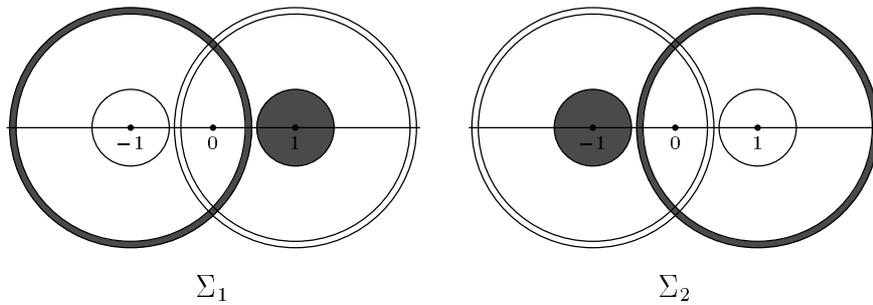
Nachdem wir in Abschnitt 4.1 zeigen konnten, daß die Gebietsableitungen für einfach zusammenhängende Gebiete injektiv sind, ist es naheliegend zu fragen, ob wir einen globalen Eindeutigkeitssatz für zusammenhängende und einfach zusammenhängende Gebiete beweisen können. Für das inverse Quellproblem existiert das folgende Gegenbeispiel (aus [19]), das sich am einfachsten an einigen Bildern erklären läßt.

Wegen Satz 4.12 und der Mittelwerteigenschaft für harmonische Funktionen ist klar, daß eine Kreisscheibe und ein Torus mit gleichem Flächeninhalt und gleichem Schwerpunkt ein identisch äußeres Newton-Potential erzeugen. Wählt man reelle Zahlen ε, δ mit $0 < \delta - 1 < \varepsilon < 1/2$, $\delta^2 = (1 + \varepsilon)^2 - \varepsilon^2$ und definiert man Mengen

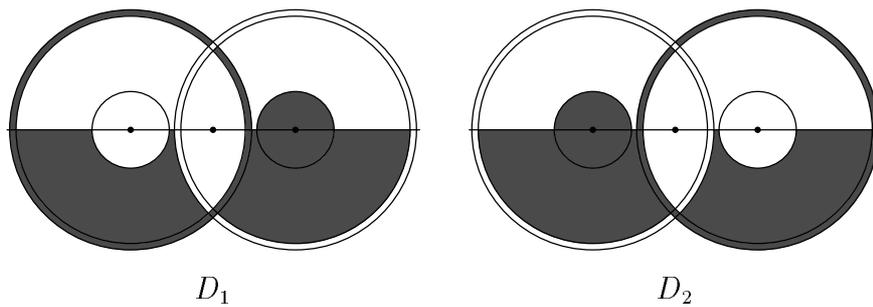
$$\Sigma_1 := K(1; \varepsilon) \cup T(-1; \delta, 1 + \varepsilon), \quad \Sigma_2 = K(-1; \varepsilon) \cup T(1; \delta, 1 + \varepsilon),$$

mit $K(z_0; r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$,
 und $T(z_0; r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2\}$,

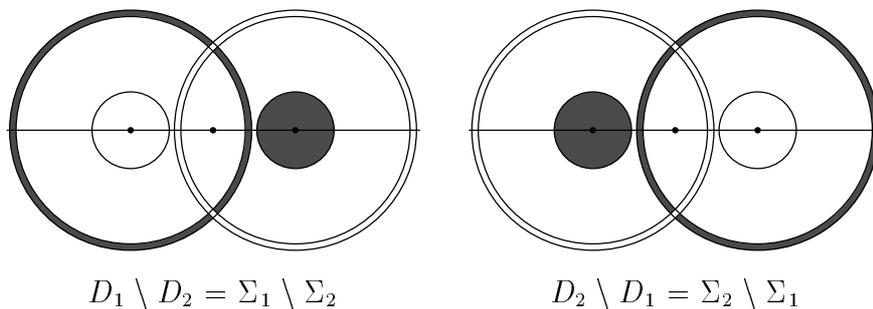
so ist daher $v_{\Sigma_1} = v_{\Sigma_2}$ auf $G := \mathbb{R}^2 \setminus (K(-1; 1 + \varepsilon) \cup K(1; 1 + \varepsilon))$.



Wir definieren Mengen $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}$ durch die schattierten Gebiete in der folgenden Abbildung.



Aus der Definition (4.25) ist unmittelbar ersichtlich, daß $v_{D_1} = v_{D_2}$ auf G genau dann gilt, wenn auch $v_{D_1 \setminus D_2} = v_{D_2 \setminus D_1}$ ist. Aus $D_1 \setminus D_2 = \Sigma_1 \setminus \Sigma_2$ und $D_2 \setminus D_1 = \Sigma_2 \setminus \Sigma_1$ folgt jetzt $v_{D_1} = v_{D_2}$ auf G .



Den Bildern entnimmt man, daß D_1 und D_2 einfach zusammenhängend sind.

Es ist bereitet keine Schwierigkeiten den Beweis des Satzes 4.13 auf Gebiete mit Ecken zu übertragen, so daß man hieraus auch ein Gegebenispiel für das Problem (4.24) erhält.

Dieses Gegenbeispiel legt die Vermutung nahe, daß für die Eindeutigkeit noch zu fordern wäre, daß $\mathbb{R}^2 \setminus (D_1 \cup D_2)$ zusammenhängend ist. Ein entsprechender Beweis ist aber nicht bekannt. In [19] findet man einen Eindeutigkeitsbeweis für Gebiete, die sternförmig bezüglich ihres Schwerpunktes sind. Leider geht diese Eigenschaft bei der Rücktransformation durch ϕ^{-1} , ϕ wie in Satz 4.13, verloren. Für unser ursprüngliches Problem erhält man, daß $D_1 = D_2$ aus $u'_{D_1}|_{\partial\Omega} = u'_{D_2}|_{\partial\Omega}$ folgt, falls die transformierten Gebiete $\phi(D_i)$, $i = 1, 2$, sternförmig bezüglich ihres Schwerpunktes sind. Dieses Kriterium ist aber wenig anschaulich und daher nicht wirklich befriedigend.

5 Numerische Lösung des inversen Problems

In diesem Abschnitt werden numerische Verfahren zur Lösung des inversen Problems vorgestellt und mit synthetischen und gemessenen Daten erprobt. Bei den gemessenen Daten handelt es sich um Aufnahmen am menschlichen Thorax aus der medizinischen Anwendung der Impedanztomographie. Wir erläutern zunächst die Datenaufnahme des Impedanztomographen, von dem die Meßdaten stammen, und gehen auf einige Details der Modellierung des direkten Problems in den Algorithmen ein. Anschließend werden die Verfahren beschrieben und die aus den Testdaten erzeugten Bilder präsentiert.

5.1 Datenaufnahme und Modellierung

Die in dieser Arbeit zur Erprobung der Rekonstruktionsverfahren verwendeten Meßdaten stammen von einem Impedanztomographen mit 16 Elektroden. Die Stromeinspeisung erfolgt jeweils durch ein Paar benachbarter Elektroden. Aus technischen Gründen können die stromführenden Elektroden nicht zur Spannungsmessung verwendet werden. Dies führt zu 14 linear unabhängigen Stromeinspeisungen und 104 Spannungswerten. Die Zuordnung der Meßdaten zu den einspeisenden- beziehungsweise spannungsmessenden Elektroden zeigt die folgende Tafel.

$I \setminus V$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	I	-	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	-
2	-	I	-	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
3			I	-	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
4				I	-	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
5					I	-	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
6						I	-	60	61	62	63	64	65	66	67	68
7							I	-	69	70	71	72	73	74	75	76
8								I	-	77	78	79	80	81	82	83
9									I	-	84	85	86	87	88	89
10										I	-	90	91	92	93	94
11											I	-	95	96	97	98
12												I	-	99	100	101
13													I	-	102	103
14														I	-	104

Das Datum in der i -ten Zeile und der j -ten Spalte in der Tafel ist der Spannungswert zwischen Elektrode j und $j + 1$ (beziehungsweise 16 und 1, falls $j = 16$) bei Stromeinspeisung zwischen den Elektroden i und $i + 1$. Das stromführende Elektrodenpaar ist durch ein 'I' gekennzeichnet. Bei Spannungswerten, die nicht gemessen werden können, weil eine der Elektroden des Paares zur Stromeinspeisung benutzt wird, ist ein '-' in der Tafel eingetragen. Die unterhalb der Diagonalen befindlichen Spannungswerte liefern aufgrund der Reziprozität keine neuen Informationen und werden deshalb nicht gemessen.

Bei der numerischen Implementierung des direkten Problems ist natürlich eine möglichst große Übereinstimmung zwischen mathematischer Modellierung und tatsächlicher Messung wünschenswert. Wir werden verschiedene Annahmen machen, die bei der Datenaufnahme in der Praxis verletzt sind. Die wichtigsten sind in der folgenden Liste mit einer kurzen Begründung zusammengestellt.

- (a) Es wird der zweidimensionale Fall $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ zur Berechnung des Vorwärtsabbildung herangezogen. Dies dient im wesentlichen der Vereinfachung des Lösers für das direkte Problem (1.1).
- (b) Wir werden voraussetzen, daß Ω eine Kreisscheibe ist und die Elektroden auf $\partial\Omega$ äquidistant verteilt sind. Bei den angestrebten Anwendungen in der Medizin ist eine genaue Bestimmung der Randkurve $\partial\Omega$ und der Elektrodenpositionen mit inakzeptablem Aufwand verbunden, so daß diese Daten für die Bilderzeugung nicht zur Verfügung stehen.
- (c) Das Randwertproblem (1.1) modelliert den Fall einer isotropen Leitfähigkeit, während die Leitfähigkeiten von Körpergeweben in der Regel nicht isotrop sind. In [25] ist gezeigt, daß eine nichtisotrope Leitfähigkeit durch ihre Neumann-Dirichlet-Abbildung nicht eindeutig bestimmt ist.
- (d) Die Modellierung der Stromeinspeisung durch die Vorgabe der Neumann-Randwerte ist in der Nähe der stromführenden Elektroden ungenau. Bessere Modelle sind erheblich komplizierter (siehe [26]) und benötigen eventuell genaue Kenntnis der Charakteristika der verwendeten Elektroden.

Bei Verwendung eines derartig vereinfachten Modells ist es nicht möglich, aus gemessenen Daten die absoluten Leitfähigkeiten in akzeptabler Qualität zu rekonstruieren. Zur Bilderzeugung verwendet man daher nach einer Idee von Barber und Brown [3] zwei Datensätze. Nach der ersten Messung wird eine Veränderung der Leitfähigkeit im zu untersuchenden Objekt abgewartet und dann der zweite Datensatz aufgenommen. Anschließend werden die relativen Spannungsänderungen als Ausgangsdaten für die Rekonstruktion der relativen Leitfähigkeitsänderungen im Objekt verwendet. Sind zwei Paare von Leitfähigkeitsverteilungen $\sigma_{\text{ref}}^{(1)}$, $\sigma^{(1)}$ und $\sigma_{\text{ref}}^{(2)}$, $\sigma^{(2)}$ mit identischer relativer Leitfähigkeitsänderung

$$(5.1) \quad \frac{\sigma^{(1)} - \sigma_{\text{ref}}^{(1)}}{\sigma_{\text{ref}}^{(1)}} = \frac{\sigma^{(2)} - \sigma_{\text{ref}}^{(2)}}{\sigma_{\text{ref}}^{(2)}}$$

gegeben, so werden die zugehörigen relativen Spannungsänderungen im allgemeinen voneinander verschieden sein. Um zu gewährleisten, daß aus Leitfähigkeitspaaren mit (5.1) auch identische relative Spannungsänderungen resultieren, wird in den Rekonstruktionsalgorithmen zusätzlich angenommen, daß die Leitfähigkeit in Ω bei der ersten Messung σ_{ref} konstant gewesen ist. Zur Modellierung des Vorwärtsproblems wird die Normierung $\sigma_{\text{ref}} = 1$ verwendet. Setzt man die Leitfähigkeit bei der zweiten Messung als $\sigma = 1 + \sigma_{\delta}$, $\sigma_{\delta} \in L^{\infty}(\Omega)$, $-1 < \sigma_{\delta}$ an, so ist σ_{δ} gerade die relative Leitfähigkeitsänderung zwischen den beiden Messungen. Bezeichnet man den Vektor der 104 relativen Spannungsänderungen mit v_{δ} , so erhält man eine modifizierte Vorwärtsabbildung

$$\sigma_{\delta} \mapsto v_{\delta} = (v_{\delta,1}, \dots, v_{\delta,104})^T, \quad v_{\delta,j} := \frac{v_j - (v_{\text{ref}})_j}{(v_{\text{ref}})_j}, \quad j = 1, \dots, 104.$$

Da die Spannungen linear von der Stromstärke abhängen, hat diese keinen Einfluß auf die relativen Spannungsänderungen. Außerdem kann man annehmen, daß die Längeneinheit so gewählt ist, daß Ω die Einheitskreisscheibe \mathcal{D} ist.

Die geschilderte Vorgehensweise ist natürlich nur dann sinnvoll, wenn sich die Leitfähigkeiten im Objekt auch wirklich ändern. Bei den Anwendung in der medizinischen Diagnostik, zum Beispiel der Beobachtung der Lungentätigkeit, ist dies häufig der Fall.

5.2 Beschreibung der Verfahren

Wir geben zunächst Beschreibungen der Verfahren, die zur Lösung des inversen Problems implementiert worden sind. Für alle Verfahren werden zunächst numerische Methoden zur Lösung von (1.1) benötigt. Aus diesen erhält man unmittelbar eine Abbildung

$$F : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{104}, \quad \sigma_\delta \mapsto v_\delta.$$

Hier bezeichnet Σ einen geeigneten Parameterraum, durch den die Leitfähigkeitsänderungen beschrieben sind. Sind Spannungsänderungen $v_\delta = (v_{\delta,1}, \dots, v_{\delta,104})^T$ gegeben, so wird die relative Änderungen der Leitfähigkeit als Lösung einer Minimierungsaufgabe

$$(5.2) \quad \min_{\sigma_\delta \in \Sigma} \|F(\sigma_\delta) - v_\delta\|^k + \lambda J(\sigma_\delta), \quad k = 1, 2$$

bestimmt. Hierbei ist $\|\cdot\|$ eine Norm, J ein Strafterm, der der Regularisierung des Problems dient, und λ ein positiver, reeller Regularisierungsparameter. Mit Ausnahme des in Abschnitt 5.2.2 geschilderten Verfahrens wird $\|\cdot\|$ die ℓ_2 -Norm und $k = 2$ sein. Wir werden dann zur Lösung von (5.2) Newton-Methoden verwenden.

Allen hier vorgestellten Verfahren werden iterative Methoden zur Lösung der Minimierungsaufgabe (5.2) zugrunde liegen. Es sind daher auch geeignete Abbruchkriterien für die Verfahren anzugeben. Bei Aufgaben dieser Art, bietet es sich an, das Verfahren abubrechen, wenn $\|F(\sigma_\delta) - v_\delta\|_\infty$ kleiner als der Meßfehler wird. Leider sind für den zur Messung verwendeten Tomographen keine Abschätzungen der Meßfehler bekannt. Auch kann es bei realen Messungen, zum Beispiel aufgrund schlecht anliegender Elektroden, vorkommen, daß einige Messungen im Datensatz unbrauchbar sind. Der Fehler bei diesen Messungen wird dann immer größer als der Meßfehler sein. Es ist daher versucht worden, das Verfahren abubrechen, wenn die Norm des Gradient des Fehlerfunctionals (5.2) unterhalb eines geeignet klein gewählten $\varepsilon > 0$ wird. Es war aber in keinem der hier vorgestellten Verfahren möglich, ε so zu wählen, daß bei die Verfahren bei allen Testdaten weder zu lange iterieren noch zu frühzeitig abbrechen. In den numerischen Experimenten haben wir daher die Iteration per Augenschein verfolgt und abgebrochen, wenn bei der Iteration keine wesentliche Änderung im Bild mehr erkennbar war.

Weil die Konvergenz der Löser für die direkten Probleme jeweils aus Standardaussagen folgt, werden wir hierauf nicht weiter eingehen. Konvergenzbeweise für die vorgestellten Methoden zur Lösung der inversen Probleme sind nicht gelungen.

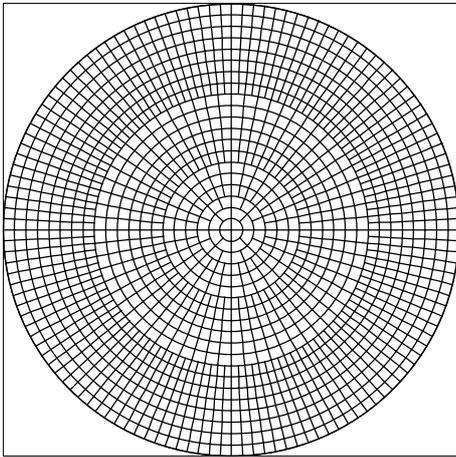
5.2.1 Ein Tikhonov-regularisiertes Newton-Verfahren

Bei dem ersten Verfahren wird die Finite-Elemente-Methode, im folgenden FEM genannt, zur numerischen Lösung des Vorwärtsproblems verwendet. Wir erläutern zunächst einige Details der verwendeten FEM. Weil wir dabei dem bekannten Standard folgen, werden wir nur kurz auf die Wahl des Gitters und die verwendeten Ansatzräume für das Potential und die Leitfähigkeit eingehen.

Für die Gitterzerlegung bietet es sich an, die Kreisscheibe durch Polarkoordinatentransformation auf ein Rechteck abzubilden und dieses dann in kleinere Rechtecke zu unterteilen. Da die stärksten Schwankungen des Potentials in der Nähe der stromführenden Elektroden zu erwarten sind, sollte die Gitterunterteilung nahe des Randes feiner als nahe der Kreismitte sein. Die Unterteilung erfolgt daher in Gebiete der Form

$$E_{i,j} := \left\{ (r \cos \theta, r \sin \theta)^T \in \mathbb{R}^2 : \frac{i-1}{n} < r < \frac{i}{n}, 2\pi \frac{j-1}{m_i} < \theta < 2\pi \frac{j}{m_i} \right\}, \\ i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m_i, \quad m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n.$$

Um die auf dieser Zerlegung beruhende FEM einfach zu halten, haben wir stets $m_i = m_{i-1}$ oder $m_i = 2m_{i-1}$ gewählt.



Die nebenstehende Abbildung zeigt das zur Lösung des direkten Problems verwendete Gitter. Es besteht aus 1532 Elementen. Für die Leitfähigkeiten setzen wir den Raum Σ der über jedem Element konstanten Funktionen an. Weil die Oberfläche der Elektroden im Verhältnis zum betrachteten Objekt in der Regel klein ist, wird angenommen, daß sich jede Elektrode über die Außenkante eines Randelementes erstreckt. Der Strom wird als konstant über die Elektrodenoberfläche angesetzt. Zu dem Gitter definiert man den endlichdimensionalen Raum V derjenigen stetigen Funktionen auf Ω , deren Einschränkungen auf jedes Element in r und θ affin bilinear sind.

Ersetzt man jetzt in der schwachen Formulierung (2.2') den Raum $H^1(\Omega)$ durch V , so erhält man ein endlichdimensionales Gleichungssystem, das bei Wahl einer geeigneten Basis von V dünn besetzt ist. Zur Berechnung der Vorwärtsabbildung ist für jede der 14 Einspeisungen ein Gleichungssystem zu lösen. Da die Koeffizientenmatrix nicht von der Einspeisung abhängt, sind bei der Implementierung die

in [14] dargestellten direkten Methoden den iterativen Verfahren zur Lösung des Systems vorzuziehen. Die Spannungswerte werden als Differenz der Mittelwerte des Potentials über die beiden Elektrodenoberflächen berechnet. Die Ableitungen der Spannungen nach den Leitfähigkeitswerten der Gitterelemente werden, wie in Abschnitt 2.3 erläutert, mit der Formel (2.14) ohne erneutes Lösen eines Gleichungssystems berechnet.

Bei der Tikhonov-Regularisierung wird für den Strafterm J in (5.2) die $L^2(\Omega)$ -Norm von σ_δ verwendet. Eine Einführung in das allgemeine Konzept der Tikhonov-Regularisierung findet man in [23]. Die Berechnung von σ_δ erfolgt durch Lösung des Minimierungsproblems

$$(5.3) \quad \min_{\sigma_\delta \in \Sigma} E_\lambda(\sigma_\delta), \quad E_\lambda(\sigma_\delta) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{104} (F_i(\sigma_\delta) - v_{\delta,i})^2 + \frac{\lambda}{2} \|\sigma_\delta\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Schließlich beschreiben wir noch das Newton-Verfahren, das zur numerischen Lösung von (5.3) verwendet wurde. Es seien E_1, \dots, E_N , $N = \dim(\Sigma)$ die Elemente des Gitters der FEM. Eine $L^2(\Omega)$ -orthonormale Basis von Σ ist dann durch (e_1, \dots, e_N) mit

$$e_i = \frac{1}{\sqrt{|E_i|}} \chi_{E_i}, \quad i = 1, \dots, N$$

gegeben. Der Gradient und die Hessische Matrix von E_λ bei $\sigma_\delta = \sum \sigma_{\delta,k} e_k$ sind gegeben durch

$$(5.4) \quad \nabla E_\lambda(\sigma_\delta) = \sum_{k=1}^N \left\{ \sum_{i=1}^{104} \left(\frac{\partial F_i}{\partial e_k}(\sigma_\delta) (F_i(\sigma_\delta) - v_i) \right) + \lambda \sigma_{\delta,k} \right\} e_k$$

$$(5.5) \quad \nabla^2 E_\lambda(\sigma_\delta) = \sum_{k,l=1}^N \left\{ \sum_{i=1}^{104} \left(\frac{\partial F_i}{\partial e_l}(\sigma_\delta) \frac{\partial F_i}{\partial e_k}(\sigma_\delta) + \frac{\partial^2 F_i}{\partial e_l \partial e_k}(\sigma_\delta) (F_i(\sigma_\delta) - v_{\delta,i}) \right) + \lambda \delta_{k,l} \right\} e_k \otimes e_l.$$

Hier ist $\delta_{k,l}$ das Kronecker-Delta-Symbol und $e_k \otimes e_l$ die Matrix, die in der k -ten Zeile, l -ten Spalte eine 1 und sonst nur Nullen enthält. Ist $\sigma_{\delta,0}$ eine gegebene Näherung an die Lösung von (5.3), so berechnet man die durch einen Newton-Schritt verbesserte Lösung $\sigma_{\delta,1}$ durch $\sigma_{\delta,1} = \sigma_{\delta,0} + \sigma_\delta^*$ mit σ_δ^* die Lösung von

$$(5.6) \quad \nabla^2 E_\lambda(\sigma_{\delta,0}) \sigma_\delta^* = -\nabla E_\lambda(\sigma_{\delta,0}).$$

Wie allgemein üblich lassen wir in (5.6) die zweiten Ableitungen von F in (5.5) weg, ersetzen also $\nabla^2 E_\lambda(\sigma_\delta)$ durch

$$\tilde{\nabla}^2 E_\lambda(\sigma_\delta) := \sum_{k,l=1}^N \left\{ \left(\sum_{i=1}^{104} \frac{\partial F_i}{\partial e_l}(\sigma_\delta) \frac{\partial F_i}{\partial e_k}(\sigma_\delta) \right) + \lambda \delta_{k,l} \right\} e_k \otimes e_l.$$

Ist $S := DF(\sigma_{\delta,0}) \in \mathbb{R}^{104 \times N}$ die Jakobi-Matrix von F bei $\sigma_{\delta,0}$ bezüglich der Basis $\{e_1, \dots, e_k\}$ und $g := \nabla E_\lambda(\sigma_{\delta,0})$, so wird das System (5.6) zu

$$(5.7) \quad (S^T S + \lambda \text{Id}) \sigma_\delta^* = -g.$$

Da es sich hier um ein $N \times N$ -Gleichungssystem handelt, ist es für die Effizienz des Verfahrens wichtig, die spezielle Struktur des Systems bei der Lösung zu nutzen.

Dazu berechnet man zuerst eine QR -Zerlegung

$$S^T = Q \cdot \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $Q \in \mathbb{R}^{N \times N}$ orthogonal und $R \in \mathbb{R}^{104 \times 104}$ eine obere Dreiecksmatrix. Dies eingesetzt in (5.7) ergibt

$$(5.8) \quad Q \begin{pmatrix} RR^T + \lambda \text{Id} & 0 \\ 0 & \lambda \text{Id} \end{pmatrix} Q^T \sigma_\delta = -g.$$

Dieses System läßt sich durch eine Cholesky-Zerlegung von $RR^T + \lambda \text{Id}$ lösen. Bei Implementierung der QR -Zerlegung von S^T durch die Householder-Methode wird Q als Produkt von 104 Spiegelungen dargestellt. Für jede Spiegelung ist lediglich der Normalenvektor der Spiegelungsebene zu speichern. Dadurch lassen sich alle Operationen auf $N \times N$ -Matrizen vermeiden.

Das Newton-Verfahren wird mit $\sigma_{\delta,0} = 0$ gestartet. Dies ist die Annahme, daß zwischen den beiden Messungen keine Leitfähigkeitsänderung stattgefunden hat. Dann wird nach dem oben beschriebenen Verfahren solange iteriert, bis die berechnete Änderung σ_δ^* , so klein geworden ist, daß sie bei einer Graustufendarstellung von σ_δ nicht mehr erkennbar ist.

Es ist noch zu bemerken, daß es sich hier um ein restringiertes Minimierungsproblem handelt, weil $\sigma_\delta > -1$ vorausgesetzt werden muß. In unseren numerischen Experimenten ist der Fall, daß während der Iteration Leitfähigkeitsänderungen kleiner als -1 werden, nur bei Rekonstruktion von Gebieten mit großem Leitfähigkeitskontrast aufgetreten. Bei den Daten aus der Praxis konvergiert das Verfahren rasch und bedarf keiner Schrittweitensteuerung.

5.2.2 Ein Verfahren mit ℓ_1 -Strafterm

Bei Verwendung der Tikhonov-Regularisierung erscheinen die Leitfähigkeitsänderungen in der Rekonstruktion in geglätteter Form. Dies führt insbesondere dazu, daß bei stückweise konstantem σ_δ die Kanten der Gebiete in den Bildern verwaschen und unscharf erscheinen. In [9] wurde vorgeschlagen, zur Rekonstruktion von Funktionen mit Blockstruktur

$$J(\sigma_\delta) = \|\nabla \sigma_\delta\|_1 = \sum_{i=1,2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \sigma_\delta}{\partial x_i} \right| dx$$

als Strafterm zu wählen.

Wir erläutern hier nur kurz die grundlegende Motivation für die Benutzung dieses Strafterms und verweisen für eine genauere Analyse auf [9] und [1]. Ist die Leitfähigkeitsänderung gegeben durch

$$\sigma_\delta = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{D_k}, \quad a_k \in \mathbb{R}$$

mit disjunkten, glatt berandeten $\bar{D}_k \subset \Omega$ und ist $f \in C^1(\bar{\Omega})$, so gilt

$$(5.9) \quad J(\sigma_\delta + f) = J(\sigma_\delta) + J(f).$$

Hier ist zunächst J auf geeignete Funktionenräume zu erweitern, indem man $\nabla \sigma_\delta$ im distributionellen Sinne auffaßt. Geht man davon aus, daß eine Rekonstruktion $\tilde{\sigma}_\delta$ von σ_δ mit diesem Strafterm von der Form

$$(5.10) \quad \tilde{\sigma}_\delta = \sum_{k=1}^n b_k \chi_{E_k} + \varepsilon, \quad \bar{E}_k \subset \Omega, \quad \varepsilon \in C^1(\bar{\Omega})$$

ist, so wird man aufgrund von (5.9) vermuten, daß ε durch den Strafterm J klein gehalten wird. Andererseits darf man erwarten, daß aus großen Abweichungen zwischen $b_k \chi_{E_k}$ und $a_k \chi_{D_k}$ auch verhältnismäßig große Abweichungen in den zugehörigen Daten resultieren. Daher hofft man, daß solche Abweichungen durch den ersten Term in (5.2) verhindert werden. Natürlich sind dies heuristische Betrachtungen, weil die Zerlegung in (5.10) im allgemeinen nicht existiert.

Zur Diskretisierung der Leitfähigkeit ist wieder der Raum Σ zu dem Gitter aus dem vorherigen Abschnitt gewählt worden. Es seien E_1, \dots, E_N und K_1, \dots, K_M die Elemente und die inneren Kanten des Gitters. Für $i = 1, \dots, M$ seien $j_1(i)$ und $j_2(i)$, $j_1(i) < j_2(i)$ die Indizes der beiden von K_i getrennten Elemente und $l(K_i)$ sei die Länge von K_i . Dann ist

$$(5.11) \quad J(\sigma_\delta) = \sum_{i=1}^M l(K_i) |\sigma_{\delta, j_1(i)} - \sigma_{\delta, j_2(i)}|, \quad \sigma_\delta = \sum_{j=1}^N \sigma_{\delta, j} \chi_{E_j} \in \Sigma.$$

Definiert man

$$(5.12) \quad (\nabla_d)_{i,j} := \begin{cases} -l(K_i), & j = j_1(i) \\ l(K_i), & j = j_2(i), \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad i = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, N,$$

so wird (5.11) zu

$$(5.13) \quad J(\sigma_\delta) = \|\nabla_d \sigma_\delta\|_1.$$

Hier ist $\|\cdot\|_1$ die gewöhnliche ℓ_1 -Vektornorm. Weil J nicht differenzierbar von den Leitfähigkeitswerten auf den Elementen abhängt, ist die Minimierungsaufgabe (5.2) numerisch schwierig zu behandeln. Um wenigstens ein lineares ℓ_1 -Problem zu erhalten, haben wir für die Norm in (5.2) ebenfalls die ℓ_1 -Norm gewählt und die Funktion F durch ihre Linearisierung $S := DF(0)$ um $\sigma_\delta = 0$ ersetzt. Die Linearisierung läßt sich wie im vorherigen Abschnitt beschrieben aus der FEM gewinnen. Prinzipiell kann für ihre Berechnung auch die Formel (3.24) verwendet werden, so daß man hier nicht an das Gitter einer FEM gebunden ist. Die Minimierungsaufgabe (5.2) hat jetzt also die Gestalt

$$(5.14) \quad \min_{\sigma_\delta \in \Sigma} \{ \|S\sigma_\delta - v_\delta\|_1 + \lambda \|\nabla_d \sigma_\delta\|_1 \}.$$

Dieser Ansatz weicht von der in [9] gewählten Methode ab. Die grundlegende Idee in dem zitierten Text ist es, $\|\nabla_d \sigma_\delta\|_1$ auf $\Sigma(v_\delta) := \{\sigma_\delta \in \Sigma : S\sigma_\delta = v_\delta\}$ zu minimieren. Die Nebenbedingung $S\sigma_\delta = v_\delta$ wird dort noch geeignet modifiziert, um $\Sigma(v_\delta) \neq \{0\}$ zu sichern und die Abhängigkeit der Lösung von v_δ zu regularisieren. Für die Implementierung wird der Absolutbetrag in (5.11) für Argumente nahe 0 durch eine differenzierbare Funktion ersetzt, um die aus der fehlenden Glattheit von J resultierenden numerischen Schwierigkeiten zu umgehen. Zur Minimierung ist dann die Methode des steilsten Abstiegs verwendet worden.

Bei numerischen Experimenten mit gemessenen Datensätzen führten Versuche, die Minimierungsaufgabe (5.14) ähnlich abzuhandeln, zu keinen befriedigenden Ergebnissen. Aus diesem Grund ist die ℓ_1 Minimierung mit dem in [6] beschriebenen Verfahren ausgeführt worden. Im ersten Schritt berechnet es die Lösung von

$$(5.15) \quad \min_{\sigma_\delta \in \Sigma} \{ \|S\sigma_\delta - v_\delta\|_2^2 + \lambda \|\nabla_d \sigma_\delta\|_2^2 \}.$$

Dann wird in den folgenden Iterationsschritten eine Folge erzeugt, die gegen eine Lösung von (5.14) konvergiert. Ein Teil der mit dieser Methode erzielten Resultate ist bereits in [17] veröffentlicht worden.

5.2.3 Ein Verfahren für stückweise konstante Leitfähigkeiten

Ist bekannt, daß die gesuchte Leitfähigkeit zumindestens annähernd stückweise konstant ist, so kann man die Lösungsmethode aus Abschnitt 3.1 zur numerischen Berechnung des direkten Problems verwenden. Man bringt die a priori Information, daß σ_δ Blockstruktur hat, dann nicht wie bei dem letzten Algorithmus durch den Strafterm, sondern direkt durch die Wahl des Parameterraumes Σ ein.

Bei der numerischen Implementierung erweist es sich als günstig, die Green'sche Funktion

$$(5.16) \quad G(x, y) = -\frac{1}{2\pi} (\ln|x-y| + \ln|x-y/|y|^2| + \ln|y|).$$

der Einheitskreisscheibe statt der Fundamentallösung als Kern der Einzelschichtpotentiale zu verwenden. Dadurch benötigt man bei der Darstellung des gebrochenen Potentials kein Einzelschichtpotential über den äußeren Rand $\mathbf{S}^1 = \partial\mathcal{D}$. Anhand von

$$|x|y| - y/|y||^2 = |x|^2|y|^2 + 1 - 2\langle x, y \rangle > 0, \quad x, y \in \bar{\mathcal{D}}, x \neq y$$

erkennt man, daß die Differenz zwischen G und der Fundamentallösung des Laplace-Operators analytisch und in beiden Variablen harmonisch auf $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ ist. Die Eigenschaften (3.22a)–(3.22c) lassen sich leicht verifizieren.

Wir erläutern die durch Verwendung der Greenschen Funktion entstehenden Vereinfachungen wieder für den Fall eines einzigen Gebietes $\bar{D} \subset \mathcal{D}$ mit Leitfähigkeit $a > 0$. Es sei $I \in C_*(\mathbf{S}^1)$, $u_I := \mathcal{L}(\mathbb{1}_{\bar{\mathcal{D}}}; I)$ das zugehörige Potential bei homogener Leitfähigkeit 1 und $u := \mathcal{L}(\chi_{\bar{\mathcal{D}} \setminus D} + a\chi_D; I)$ die Lösung des Transmissionsproblems (3.3). Wir definieren Integraloperatoren

$$\begin{aligned} (\tilde{S}_D \varphi)(x) &:= \int_{\partial D} G(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad \varphi \in C(\partial D), x \in \bar{\mathcal{D}}, \\ (\tilde{K}_D^* \varphi)(x) &:= \int_{\partial D} \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad \varphi \in C(\partial D), x \in \partial D, \end{aligned}$$

und machen für $u_b := u - u_I$ den Ansatz

$$u_b = v := \tilde{S}_D \psi_D \quad \text{mit } \psi_D \in C(\partial D).$$

Aus den Eigenschaften (3.22b), (3.22c) von G folgt

$$(5.17) \quad \frac{\partial v}{\partial \nu_{\mathbf{S}^1}}(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \psi_D ds, \quad x \in \mathbf{S}^1 \quad \text{und} \quad \int_{\mathbf{S}^1} v ds = 0$$

für beliebige Dichte $\psi_D \in C(\partial D)$. Aus der Randbedingung

$$(5.18) \quad \frac{\partial v_+}{\partial \nu} - a \frac{\partial v_-}{\partial \nu} = (a-1) \frac{\partial u_I}{\partial \nu} \quad \text{auf } \partial D$$

erhält man analog zu (3.7), daß v genau dann (5.18) erfüllt, wenn ψ_D die Gleichung

$$(5.19) \quad (\text{Id} + c\tilde{K}_D^*)\psi_D = -c \frac{\partial u_I}{\partial \nu} \quad \text{auf } \partial D, \quad c := \frac{a-1}{a+1}$$

löst. Für eine Lösung ψ_D dieser Gleichung überlegen wir uns zunächst $\partial v / \partial \nu = 0$ auf \mathbf{S}^1 . Weil u_I und v_- in D harmonisch sind, ist nämlich

$$\int_{\partial D} \frac{\partial u_I}{\partial \nu} ds = \int_{\partial D} \frac{v_-}{\partial \nu} ds = 0$$

und aus (5.18) folgt somit

$$\int_{\partial D} \frac{\partial v_+}{\partial \nu} ds = 0.$$

Weil v_+ in $\mathcal{D} \setminus \bar{D}$ harmonisch ist, ist also

$$\int_{\mathbf{S}^1} \frac{\partial v}{\partial \nu} ds = \int_{\partial D} \frac{\partial v_+}{\partial \nu} = 0.$$

Nach (5.17) ist $\partial v / \partial \nu_{\mathbf{S}^1}$ konstant, und wegen der letzten Gleichung verschwindet diese Konstante. Aus dem Eindeigkeitsteil des Satzes 3.2 folgt jetzt $v = u_b$, wenn ψ_D die Gleichung (5.19) löst. Insbesondere ist $v = 0$ für eine Lösung ψ_D der homogenen Gleichung (5.19), und wegen der Sprungbeziehungen ist dann auch $\psi_D = 0$. Aus der Riesz-Theorie folgt jetzt, daß (5.19) eine eindeutige Lösung besitzt.

Es seien jetzt endlich viele zusammenhängende und einfach zusammenhängende Gebiete $D_1, \dots, D_n \subset \mathcal{D}$ mit $\bar{D}_j \subset \mathcal{D}$ und $\partial D_j \cap \partial D_k = \emptyset$, $j, k = 1, \dots, n$, $j \neq k$ gegeben. Ist die Leitfähigkeit konstant gleich a_j auf dem Gebiet

$$\hat{D}_j := D_j \setminus \bigcup_{k: D_k \not\subset D_j} D_k, \quad j = 1, \dots, n,$$

so erhält man aus dem Ansatz

$$(5.20) \quad u_b = \sum_{j=1}^n \tilde{S}_{D_j} \psi_{D_j}$$

für die Dichten das Gleichungssystem

$$(5.21) \quad \begin{pmatrix} \psi_{D_1} \\ \psi_{D_2} \\ \vdots \\ \psi_{D_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \tilde{K}_{D_1}^* & c_1 \frac{\partial \tilde{S}_{D_2}}{\partial \nu_{D_1}} & \cdots & c_1 \frac{\partial \tilde{S}_{D_n}}{\partial \nu_{D_1}} \\ c_2 \frac{\partial \tilde{S}_{D_1}}{\partial \nu_{D_2}} & c_2 \tilde{K}_{D_2}^* & \cdots & c_2 \frac{\partial \tilde{S}_{D_n}}{\partial \nu_{D_2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n \frac{\partial \tilde{S}_{D_1}}{\partial \nu_{D_n}} & c_n \frac{\partial \tilde{S}_{D_2}}{\partial \nu_{D_n}} & \cdots & c_n \tilde{K}_{D_n}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{D_1} \\ \psi_{D_2} \\ \vdots \\ \psi_{D_n} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_1 \frac{\partial u_I}{\partial \nu_{D_1}} \\ c_2 \frac{\partial u_I}{\partial \nu_{D_2}} \\ \vdots \\ c_n \frac{\partial u_I}{\partial \nu_{D_n}} \end{pmatrix}.$$

Hierbei ist $c_j := (a_j - a_{p(j)}) / (a_j + a_{p(j)})$ und $a_{p(j)}$ die Leitfähigkeit in dem äußeren der beiden Gebiete, die von der Kurve ∂D_j getrennt werden. Setzt man hier die Hintergrundleitfähigkeit gleich 1, so stellen die Größen $a_j - 1$ die relativen Leitfähigkeitsänderungen dar.

Ähnlich wie oben kann man argumentieren, daß (5.21) eine eindeutige Lösung besitzt und u_b mit der Lösung $\psi_{D_1}, \dots, \psi_{D_n}$ von (5.21) durch (5.20) dargestellt wird. Sind die Randkurven ∂D_j , $j = 1, \dots, n$ analytisch, so sind die Kerne der Integraloperatoren $\frac{\partial \tilde{S}_{D_j}}{\partial \nu_{D_k}}$, $j \neq k$ ebenfalls analytisch. Es läßt sich zeigen, daß auch die Kerne von $\tilde{K}_{D_j}^*$ analytisch sind. Für die Diskretisierung von (5.21) bietet

sich daher die Nyström-Methode mit der Trapezregel an. Eine Beschreibung und Fehleranalyse dieses Verfahrens findet man in [23]. Zur Lösung des Vorwärtsproblems haben wir in dem Rekonstruktionsalgorithmus 32 Diskretisierungspunkte auf jeder inneren Kurve verwendet.

Als ungebrochenes Potential u_I haben wir das Potential

$$u_I(x) = -\frac{1}{2\pi} (\ln|x - p_1| - \ln|y - p_2|)$$

zur Einspeisung in den beiden Punkten p_1, p_2 gewählt. Hierbei sind $p_1, p_2 \in \mathbf{S}^1$ die Mittelpunkte der einspeisenden Elektroden. Der Spannungswert wird dann als Potentialdifferenz zwischen den Mittelpunkten der spannungsmessenden Elektroden berechnet. Die Quadratur zur Berechnung des Potentials nach (5.20) auf dem äußeren Rand wurde ebenfalls mit der Trapezregel und denselben Diskretisierungspunkten wie das Nyström-Verfahren ausgeführt.

Ist die ungefähre Lage der zu rekonstruierenden Gebiete bekannt und sind diese sternförmig, so kann man die Gebiete als

$$(5.22) \quad \begin{aligned} \partial D_j &= \{x_j + r_j(t)\omega_j(t) : t \in [0, 2\pi)\}, \quad x_j \in D_j, \\ \omega_j(t) &= \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad r_j(t) = \frac{\alpha_0^{(j)}}{2} + \sum_{m=1}^N \alpha_m^{(j)} \cos(mt) + \beta_m^{(j)} \sin(mt) \end{aligned}$$

ansetzen. Das inverse Problem besteht dann in der Bestimmung der Parameter $\alpha_0^{(j)}, \dots, \alpha_N^{(j)}$ und $\beta_1^{(j)}, \dots, \beta_N^{(j)}$, sowie den relativen Leitfähigkeitsänderungen $a_{\delta,j}$ in den Gebieten.

Ist die Lage der Gebiete unbekannt, so muß man Klassen von Kurven betrachten, bei denen die Parameter eine Bewegung der Gebiete in \mathcal{D} zulassen. Wir werden in den numerischen Experimenten in Abschnitt 5.3.2 den Fall eines einzigen Gebietes ohne a priori Informationen über die Lage des Gebietes betrachten. Den Rand des Gebietes setzen wir dann als Ellipse der Form

$$(5.23) \quad \partial D_j = \left\{ x_m + \mathbf{R}(\theta) \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix} \right\}, \quad x_m \in \mathcal{D}, \quad \mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

an. Die zu rekonstruierenden Kurvenparameter sind dann der Mittelpunkt x_m , die Längen der Halbachsen a, b und der Drehwinkel θ . Hier ist zu beachten, daß der Drehwinkel im Falle $a = b$ keinen Einfluß auf die Kurve hat.

Für die Verwendung von Newton-Verfahren benötigt man auch die Ableitungen der Vorwärtsabbildung nach den zu bestimmenden Parametern. Prinzipiell kann man hierfür die Charakterisierungssätze 3.3 und 3.4 verwenden. Die Berechnung der Ableitungen nach den Parametern, die die Kurve festlegen, mit Satz 3.4 erfordert wegen der Unstetigkeit (3.29c) des abgeleiteten Potentials einen Ansatz, der auch Doppelschichtpotentiale über die inneren Ränder ∂D_j enthält. Eine Randintegralmethode für allgemeine Transmissionsprobleme des Typs (3.29) muß

daher ein Gleichungssystem lösen, das bei gleicher Anzahl von Diskretisierungspunkten, verglichen mit dem System (5.21), die doppelte Anzahl von Unbekannten enthält. Um dies zu vermeiden, sind in der vorliegenden Implementierung zunächst die abgeleiteten Dichten ψ'_{D_j} durch Differenzieren der diskretisierten Version des Systems (5.21) berechnet worden. Dies erfordert im wesentlichen das Lösen eines linearen Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix des Ausgangssystems. Die bereits zur Lösung von (5.21) berechnete LR-Zerlegung dieser Matrix läßt sich an dieser Stelle erneut verwenden. Für die Ableitung nach einem Parameter der Kurve ∂D_k berechnet man anschließend die Ableitung S'_{D_k} durch Differenzieren des mit der Trapezregel diskretisierten Einzelschichtpotentialoperators. Das abgeleitete Potential erhält man dann in der Form

$$(5.24) \quad \left(\sum_j S_{D_j} \psi'_{D_j} \right) + S'_{D_k} \psi_{D_k}.$$

Die Ableitungen nach den a_j berechnen wir auf analogem Weg. Weil die S_{D_j} nicht von den Leitfähigkeiten abhängen, verschwindet bei der Ableitung nach den a_j der zweite Term in (5.24).

Schließlich ist auch für dieses Verfahren ein geeigneter Strafterm J für die Minimierungsaufgabe (5.2) zu wählen. Zur Regularisierung in den Leitfähigkeitsänderungen bietet sich wieder das Quadrat der ℓ_2 -Norm $\sum_j (a_j - 1)^2$ an. Zur Regularisierung in den Kurvenparametern ist allerdings ein Strafterm wünschenswert, der die Parameterwerte nicht direkt benutzt. Vielmehr sollten solche Größen verwendet werden, die nur von ∂D_j abhängen, nicht aber von der jeweiligen Parametrisierung der Kurve. Wir haben daher die Kurvenlänge $l(\partial D_j)$ zur Regularisierung verwendet. Betrachtet man die Vorwärtsabbildung als Funktion von a_1, \dots, a_n und den Parametern p_1, \dots, p_M , die die Kurven festlegen, so bestimmen wir die Lösung des inversen Problems durch das Minimierungsproblem

$$(5.25) \quad \min_{\substack{a_1, \dots, a_n \\ p_1, \dots, p_M}} \|F(a_1, \dots, a_n, p_1, \dots, p_M) - v_\delta\|^2 \\ + \lambda_1 \sum_{j=1}^n l(\partial D_j)^2 + \lambda_2 \sum_{j=1}^n (a_j - 1)^2.$$

Der Raum der zulässigen Parameter ist insbesondere bei der Kurvenklasse (5.22) relativ kompliziert. Neben $D_j \subset \mathcal{D}$ ist auch $r_j > 0$ und $\partial D_j \cap \partial D_k = \emptyset$, $j \neq k$ sicherzustellen. Es hat sich aber gezeigt, daß bei geeigneter Wahl der Regularisierungsparameter λ_1 , λ_2 nur $D_j \subset \mathcal{D}$ in jedem Iterationsschritt explizit überprüft werden muß.

Nach Wahl der Startkurven werden die a_j zunächst auf den Wert 1 der Hintergrundleitfähigkeit gesetzt. Im ersten Schritt werden dann nur die Leitfähigkeitswerte a_j bestimmt und die Kurven unverändert gelassen. In den Experimenten zeigte sich, daß für die Minimierung eine Schrittweitensteuerung notwendig ist.

Wir haben daher zur Lösung von (5.25) das Levenberg-Marquardt-Verfahren benutzt.

5.3 Resultate der numerischen Verfahren

Im folgenden werden wir die Rekonstruktionen der beiden Algorithmen aus 5.2.1 und 5.2.2 in Graustufenbildern darstellen. Um kontrastreiche Bilder auch bei Ausgabe auf einem Laserdrucker zu erreichen, haben wir lediglich 8 Graustufen verwendet. In den Kopfzeilen der Bilder befinden sich jeweils die Angaben über den verwendeten Algorithmus und die Wahl der Regularisierungsparameter. In der Fußzeile der Bilder befindet sich die Anzahl der benötigten Iterationen und der maximalen Leitfähigkeitskontraste in der Rekonstruktion oder, bei dem Gebietsrekonstruktionsverfahren aus 5.2.3, der Leitfähigkeitskontrast des Gebietes. Die Graustufen erstrecken sich linear über den in der Fußzeile angegebenen Leitfähigkeitsbereich eines jeden Bildes. Dabei zeigt, wenn nichts anderes gesagt ist, eine dunklere Graustufe eine niedrigere Leitfähigkeit an. Wir bezeichnen mit L_{\min}^2 den Tikhonov-regularisierten Algorithmus aus 5.2.1, mit L_{\min}^1 den L^1 -regularisierten Algorithmus aus 5.2.2 und mit BFIT das Verfahren aus 5.2.3

5.3.1 Experimente mit synthetischen Daten

Wir testen die Verfahren zunächst an synthetisch erzeugten Daten. Zur Generierung der Daten haben wir die in Abschnitt 5.2.3 geschilderte Randintegralmethode mit 128 Diskretisierungspunkten benutzt. Um sicherzustellen, daß die Daten im Rahmen der Rechnergenauigkeit exakt sind, sind die relativen Spannungsänderungen mit der Nyström-Methode auch für die Diskretisierungsstufen 16, 32, und 64 berechnet worden. Bei allen hier verwendeten Datensätzen stimmten die mit 64 und 128 Punkten erzeugten Spannungsänderungen in den ersten 5 Stellen überein.

Um fehlerbehaftete Messungen zu simulieren, wurde für jeden Datensatz die größte auftretende relative Spannungsänderung $\|v_\delta\|_\infty$ bestimmt. Dann wurde mit der Formel

$$(5.26) \quad (\tilde{v}_\delta)_i = (v_\delta)_i + \frac{\varepsilon}{100} * \|v_\delta\|_\infty * \xi_i, \quad i = 1, \dots, 104$$

ein gestörter Datensatz \tilde{v}_δ erzeugt. Die ξ_i sind dabei gleichmäßig verteilte Zufallszahlen aus dem Intervall $[-1, 1]$ und ε ist der relative Fehler in Prozent.

Wir experimentieren mit „bohnenförmigen“ Gebieten, die durch Randkurven mit Parametrisierung

$$x_m + G \cdot r(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi),$$

$$x_m \in \mathcal{D}, \quad G > 0, \quad r(t) = \frac{1 + 0.9 \cos t + 0.1 \sin 2t}{1 + 0.75 \cos t}$$

begrenzt sind. Dabei bestimmen $x_m \in \mathcal{D}$ und G die Lage beziehungsweise die Größe des Gebietes. Im folgenden beschreiben wir die Daten durch Angabe von

- Mittelpunkt x_m und Größe G des Gebietes.
- Leitfähigkeitsänderung $a_\delta = 100 \cdot (a - 1)$ in Prozent bezüglich des Referenzdatensatzes.
- Größe des relativen Fehlers ε in Prozent.

Der erste Datensatz wurde mit $x_m = (0.3, 0.0)^T$, $G = 0.4$, $a_\delta = -10\%$ und $\varepsilon = 5\%$ erzeugt. Die Abbildung 1 zeigt die Originalkurve und die beiden mit den Medien-Rekonstruktionmethoden erzeugten Bildern. Im mittleren Bild ist deutlich zu erkennen, daß die Tikhonov-Regularisierung die Kanten des Gebietes verwischt. Bei nicht zu großen Leitfähigkeitskontrasten konvergiert L_{\min}^2 sehr rasch, und schon das im ersten Iterationsschritt erzeugte Bild unterscheidet sich nicht mehr wesentlich von dem nach drei Iterationsschritten. Dies ist ein Hinweis darauf, daß die Nichtlinearität der Vorwärtsabbildung in der Leitfähigkeit nicht stark ausgeprägt ist. Wir werden dies weiter unten noch einmal durch Betrachtung der Vorwärtsabbildung veranschaulichen. Am dritten Bild erkennt man deutlich, daß durch die Verwendung des L^1 -Strafterms das Gebiet schärfer dargestellt und das Rauschen abseits vom Zielobjekt deutlich reduziert wird. Das Gebiet ist in beiden Rekonstruktionen gut lokalisiert, aber Rückschlüsse über die genaue Form des Objekts lassen sich aus keinem der beiden Bilder gewinnen. Man sieht, daß der Algorithmus L_{\min}^1 bestrebt ist, auch die Kanten des Zielobjektes klein zu halten. Die genaue Form des Gebietes in der Rekonstruktion hängt daher auch von dem zugrunde liegenden Gitter ab.

Zur Rekonstruktion mit BFIT haben wir die Kurvenklasse (5.22) mit Mittelpunkt $x_m = (0.3, 0.0)^T$ und einem trigonometrischen Polynom 4. Grades als radialer Abstandsfunktion gewählt. Wir studieren hier gleich den Einfluß des Fehlers und zeigen in Abbildung 2 die Rekonstruktionen bei den mit Fehlern $\varepsilon = 5\%$, 10% und $\varepsilon = 15\%$ erzeugten Daten. Als Startkurve haben wir einen Kreis $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 = \dots = \alpha_4 = \beta_1 = \dots = \beta_4 = 0$ verwendet. Die Startkurve ist im ersten Bild schwach gestrichelt eingezeichnet. Die etwas stärker gestrichelte Linie ist die Originalkurve. Man sieht, daß BFIT die Form des Gebietes wesentlich besser rekonstruiert als die ersten beiden Algorithmen. Dies erklärt sich natürlich dadurch, daß in dieses Verfahren die Information, daß die Leitfähigkeit stückweise konstant ist, direkt eingeht. Dadurch hat BFIT, im Gegensatz zu den über 1000 Leitfähigkeitswerten bei den ersten beiden Rekonstruktionsmethoden, lediglich 9 Kurvenparameter und die Leitfähigkeit anzupassen. Außerdem haben wir durch die Wahl des Mittelpunktes x_m auch die ungefähre Lage des Gebietes vorgegeben. Wie man sieht, ist die Rekonstruktion bei $\varepsilon = 15\%$ noch relativ gut. Es ist zu vermuten, daß die durch die Verwendung verschiedener Stromeinspeisungen relativ große Datenmenge den Einfluß des Fehlers reduziert. Wir haben dies

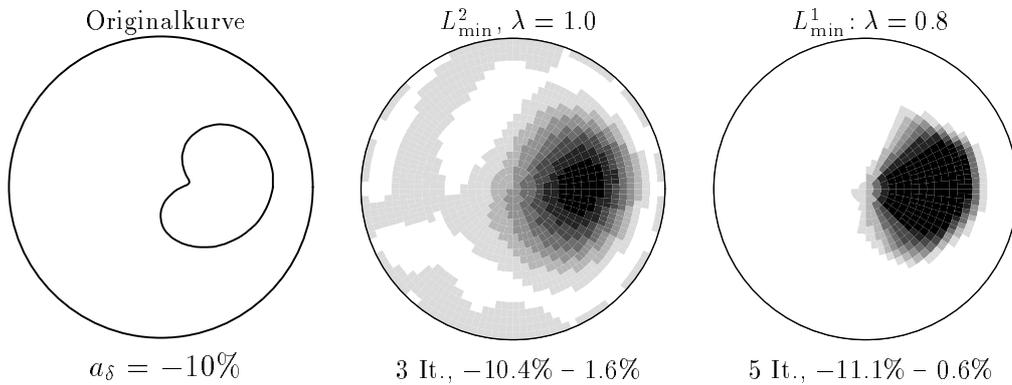


Abbildung 1: Rekonstruktion des 1. Gebietes bei $a_\delta = -10\%$, $\varepsilon = 5\%$

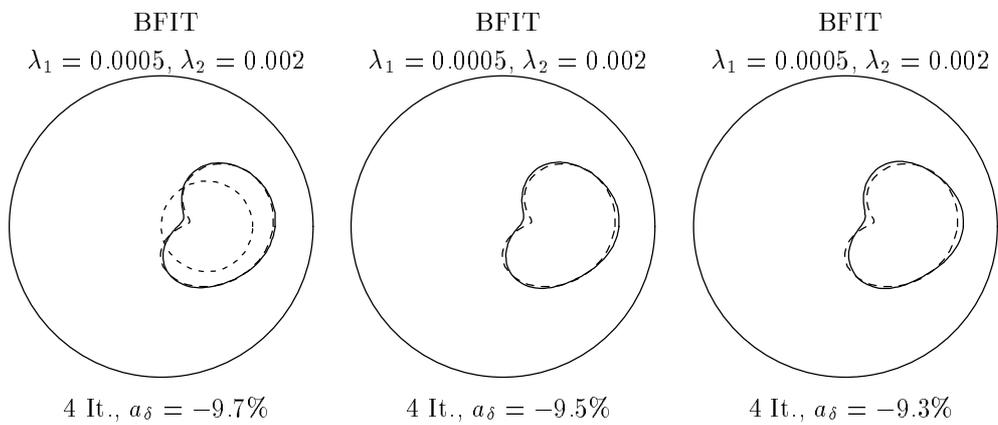


Abbildung 2: Rekonstruktion des 1. Gebietes bei $a_\delta = -10\%$, $\varepsilon = 5\%$, 10% , 15%

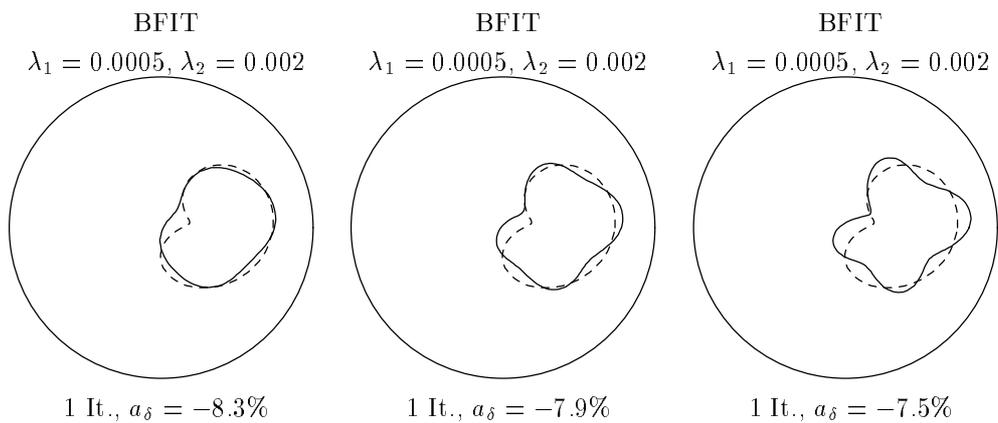


Abbildung 3: Von BFIT bei $a_\delta = -10\%$, $\varepsilon = 5\%$, 10% , 15% im ersten Iterationsschritt erzeugte Kurven

aber nicht explizit verifiziert, indem wir weniger als die gegebenen 14 Einspeisungen bei der Rekonstruktion verwendet haben. Diese Stabilität zeigt sich auch bei L_{\min}^2 und L_{\min}^1 . Die Bilder dieser Verfahren bei $\varepsilon = 10\%$, 15% unterscheiden sich nur unwesentlich von denen bei $\varepsilon = 5\%$. Auf ihre Abbildung haben wir deshalb verzichtet.

Betrachtet man in die von BFIT im ersten Iterationsschritt erzeugten Kurven in Abbildung 3, so fällt auf, daß diese bei höherem Fehlerniveau zu oszillieren beginnen. Dies erklärt sich durch die Benutzung der Kurvenlänge $l(\partial D)$ als Strafterm in (5.25). Man rechnet nämlich leicht nach, daß für einen Kreis $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 = \dots = \alpha_N = \beta_1 = \dots = \beta_N = 0$ die Ableitungen der Kurvenlänge nach den Parametern $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ und β_1, \dots, β_N verschwinden. Daher werden durch die von uns gewählten Regularisierung gerade die hohen Frequenzen der radialen Abstandsfunktion r im ersten Schritt nicht bestraft. In den nachfolgenden Iterationsschritten führt der Strafterm $l(\partial D)$ dann zu einer Glättung der Kurve. Wählt man aber das Fehlerniveau oder den Grad des trigonometrischen Polynoms größer, so entstehen im ersten Schritt Verschlingungen der Randkurve. In der Regel führt die weitere Iteration dann zu keinen brauchbaren Ergebnissen. Bei den weiter unten aufgeführten Rekonstruktionen aus realen Daten haben wir nur trigonometrische Polynome vom Grad 2 verwendet. Dabei sind Probleme mit Verschlingungen nicht aufgetreten. Wir haben daher auf den Versuch verzichtet, durch Schrittweitensteuerung oder Einführung zusätzlicher Strafterme diesen Effekt zu vermeiden.

Objekte am Rand der Kreisscheibe erzeugen größere Spannungsänderungen als solche, die in der Mitte liegen. Man wird daher erwarten, daß die Rekonstruktion für Objekte nahe des Randes besonders gut ausfallen. Die Abbildung 4 zeigt die Rekonstruktionen von BFIT, wenn der Mittelpunkt des Zielgebietes bei $x_m = (-0.6, 0.0)^T$ liegt. Gebietsgröße und Leitfähigkeitskontrast sind unverändert $G = 0.4$, $a_\delta = -10\%$. Die schwach gestrichelte Kurve im ersten Bild ist wieder die Startkurve.

An dem ersten Bild erkennt man, daß nahe des Randes auch die Einbuchtung des Gebietes nahezu perfekt rekonstruiert wird. Die folgenden beiden Bilder zeigen, daß nun auch die Anfälligkeit gegenüber dem Fehler ε größer ist. Dies hängt damit zusammen, daß sich bei einem randnahen Gebiet bei Einspeisung und Spannungsmessungen in der Nähe des Gebietes größere Spannungsänderungen ergeben. Dadurch wird die Amplitude des Fehlers (5.26) erhöht, und entsprechend wird der Anteil der Spannungswerte, die durch das Rauschen unbrauchbar geworden sind, größer. Somit reduziert sich der oben angesprochenen Effekt, daß der Einfluß des Fehlers durch die relativ große Anzahl von Daten gemindert wird.

Die Abbildung (5) zeigt die beiden Rekonstruktionen des Gebietes mit L_{\min}^2 und L_{\min}^1 . Die Verbesserung in der Darstellung der Form des Zielobjektes ist nur geringfügig. Klar erkennt man auch wieder, daß L_{\min}^1 die Kanten des Gebietes möglichst gerade entlang der Kanten des FEM-Gitters legt. Wir haben für dieses Bild den Regularisierungsparameter so klein wie möglich gewählt, um diesen Ef-

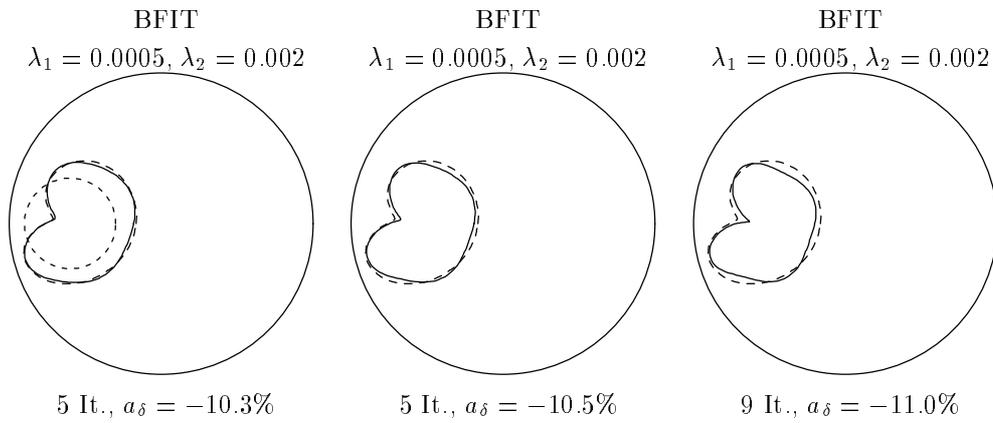


Abbildung 4: Rekonstruktion des 2. Gebietes bei $a_\delta = -10\%$, $\varepsilon = 5\%$, 10% , 15%

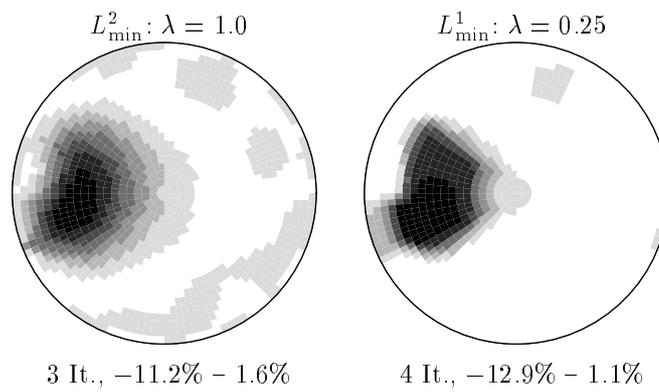


Abbildung 5: Rekonstruktion des 2. Gebietes bei $a_\delta = -10\%$, $\varepsilon = 5\%$

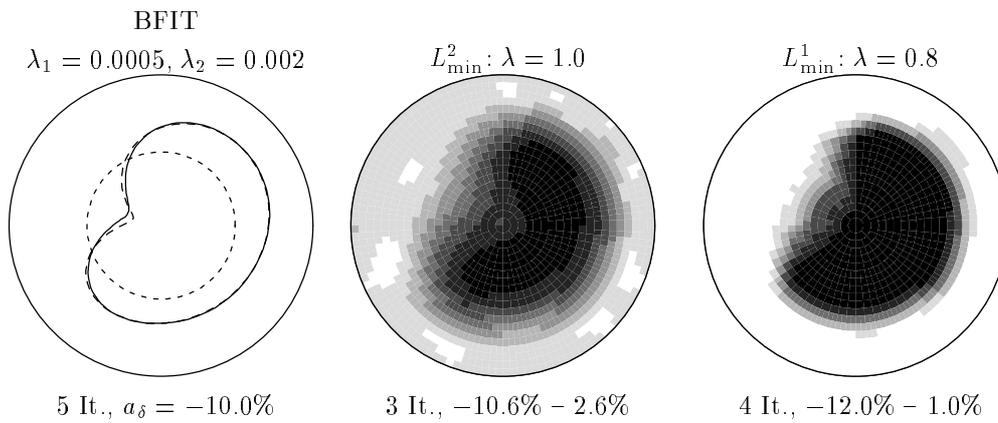


Abbildung 6: Rekonstruktion des 3. Gebietes bei $a_\delta = -10\%$, $\varepsilon = 5\%$

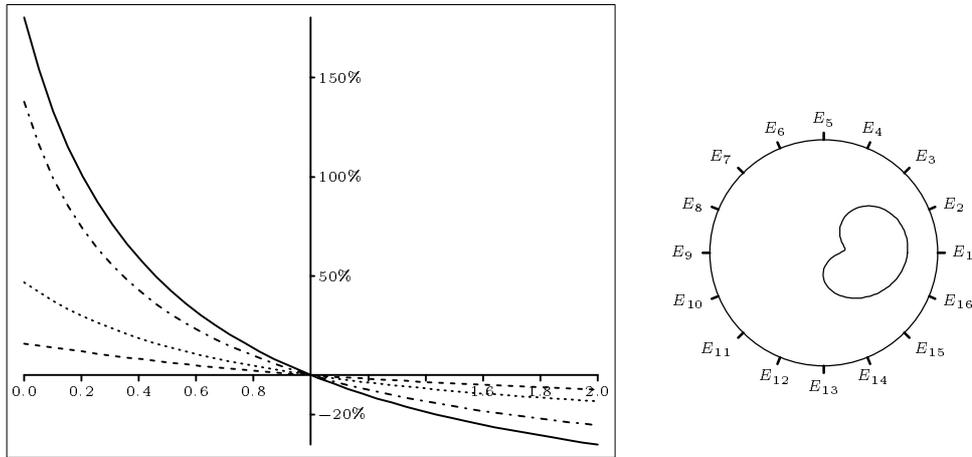
fekt zu reduzieren. Trotzdem ist die „Bohnenform“ auch aus diesen Bildern nicht zu erkennen.

Die ersten beiden Algorithmen rekonstruieren erst dann auch die ungefähre Form des eingeschlossenen Gebietes, wenn dieses relativ groß ist. Abbildung 6 zeigt die Bilder für das Gebiet $x_m = (0.0, 0.0)^T$, $G = 0.65$, $a_\delta = -10\%$

Schließlich studieren wir noch den Einfluß des Kontrastes auf die Rekonstruktionen. Das erste Bild in Abbildung 7 zeigt den Verlauf der relativen Spannungsänderungen bei variablem Leitfähigkeitskontrast für das erste zur Rekonstruktion verwendete Gebiet bei einer Hintergrundleitfähigkeit von 1. Die auf der x -Achse aufgetragenen Leitfähigkeiten erstrecken sich von 0 bis 2, die entsprechenden relativen Leitfähigkeitsänderungen also von -100% bis 100% . Aufgetragen sind verschiedene Spannungsänderungen bei der Stromspeisung zwischen den Elektroden 2 und 3, bei der sich die größten Spannungsänderungen ergeben haben. Die mit $V_{i,j}$ gekennzeichnete Kurve zeigt den Verlauf der relativen Spannungsänderung zwischen den Elektroden i und j . Die Lage der bei der Rechnung verwendeten Elektrodenmittelpunkte entnimmt man dem zweiten Bild. Der Wert bei $a = 0$ ist die Änderungen bei einem isolierenden Gebiet, für $a \rightarrow \infty$ nähern sich die Werte asymptotisch denen für ein perfekt leitendes Gebiet. Die Abbildung bestätigt, daß die Kurven in einem Bereich von -20% bis 20% annähernd linear verlaufen. Verwendet man eine in der Leitfähigkeit um $a = 1$ linearisierte Vorwärtsabbildung, so entnimmt man dem Bild, daß diese die Wirkung negativer Kontraste zu klein und die positiver Kontraste zu groß berechnet. Linearisiert man in einem Algorithmus für das inverse Problem die Vorwärtsabbildung in der Leitfähigkeit, so wird man daher erwarten, daß positive Kontraste zu klein und negative zu groß in der Rekonstruktion erscheinen.

Bei den Rekonstruktionen mit BFIT zeigte sich, daß BFIT für beliebiges a_δ gute Ergebnisse liefert, wenn man bei großen negativen Kontrasten verhindert, daß die von BFIT in den Iterationen gefundenen Leitfähigkeiten negativ werden. Aufgefallen ist, daß bei großen Kontrasten die Anfälligkeit für den Fehler ε zunimmt. Nach unseren obigen Betrachtungen liegt es nahe, die Vorwärtsabbildung in BFIT durch ihre Linearisierung um $a = 1$ zu ersetzen und hierfür die Formeln (3.21), (3.23) heranzuziehen. Für die Auswertung der Vorwärtsabbildung sind dann nur Quadraturen auszuführen. Hierfür haben wir wieder die Trapezregel mit 32 Diskretisierungspunkten verwendet. Den so modifizierten Algorithmus bezeichnen wir im folgenden mit LBFIT. Bei kleinen Leitfähigkeitskontrasten benötigen BFIT und LBFIT in der Regel gleich viele Iterationen und erzeugen nahezu identische Bilder. Durch die vereinfachte Vorwärtsabbildung wird ein Iterationsschritt von LBFIT um ein vielfaches schneller ausgeführt als ein solcher von BFIT.

Die Abbildungen 8 und 9 zeigen Rekonstruktionen des ersten Gebietes mit einem Kontrast von -50% beziehungsweise 50% . Bei den Bildern mit positivem Kontrast haben wir eine inverse Graustufendarstellung gewählt. In Abbildung 9 stellt eine dunklere Graustufe also ein Gebiet mit höherem Leitfähigkeitskontrast



----- $V_{6:7}$, - · - · - $V_{11:12}$, — $V_{14:15}$, ····· $V_{16:1}$

Abbildung 7: Verlauf der Spannungänderungen bei Einspeisung durch E_2, E_3 und variablem Kontrast

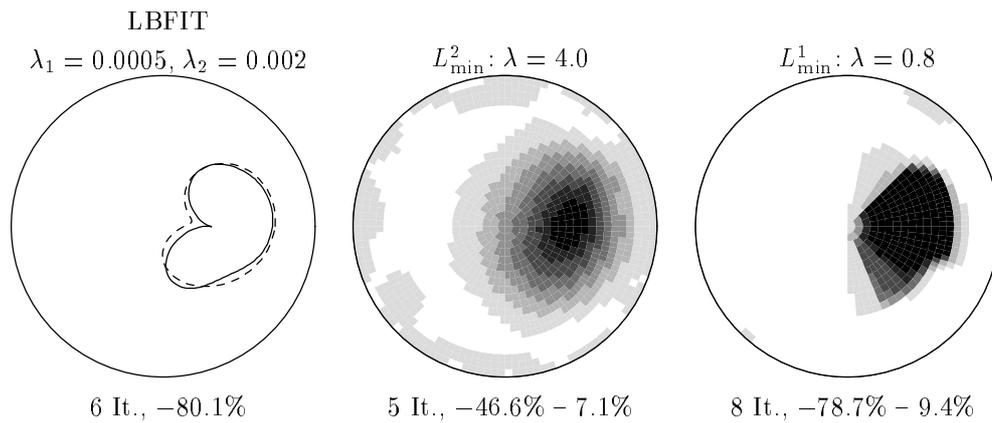


Abbildung 8: Rekonstruktion des 1. Gebietes bei $a_\delta = 50\%$, $\varepsilon = 5\%$

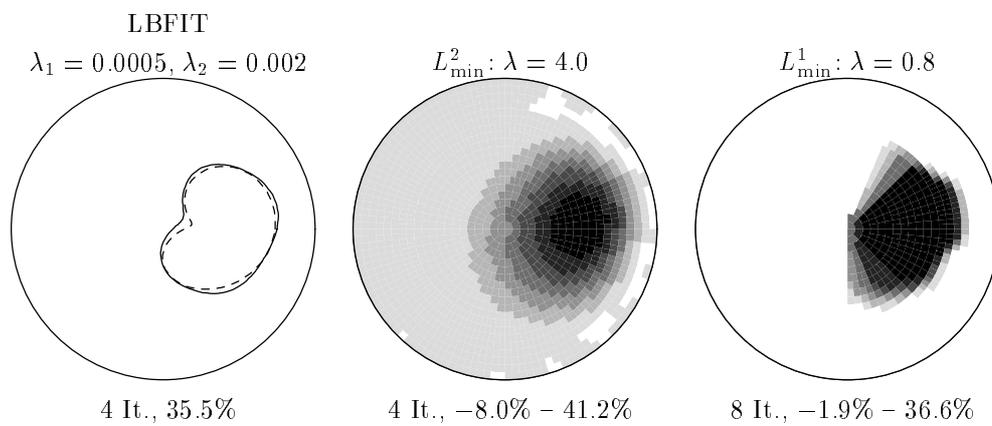


Abbildung 9: Rekonstruktion des 1. Gebietes bei $a_\delta = 50\%$, $\varepsilon = 5\%$

dar. Die Startkurve für LBFIT ist die gleiche wie in Abbildung 2. Die anhand der Abbildung 7 prognostizierten Fehler im Leitfähigkeitskontrast bei Verwendung von L_{\min}^1 und LBFIT treten deutlich in Erscheinung. Es ist aber bemerkenswert, daß die von LBFIT gefundenen Kurven das Gebiet trotzdem in akzeptabler Weise wiedergeben.

Bricht man L_{\min}^2 nach dem ersten Schritt ab, so erhält man ebenfalls ein in der Leitfähigkeit linearisiertes Verfahren. Man erwartet daher für die im ersten Schritt von L_{\min}^2 gefundenen Kontraste ein ähnliches Verhalten wie bei L_{\min}^1 . Bei unseren Experimenten zeigte sich aber, daß die Tikhonov-Regularisierung in L_{\min}^2 dazu führt, daß auch positive Leitfähigkeitskontraste überschätzt werden. Bei Experimenten mit einem Regularisierungsparameter $\lambda = 1$ war eine Unterschätzung positiver Leitfähigkeitskontraste im ersten Iterationsschritt erst bei einem originalen Leitfähigkeitskontrast von über 400% Prozent zu bemerken. Generell neigt L_{\min}^2 dazu, die im Leitfähigkeitsprofil vorhandenen Sprünge entlang der Kanten zu glätten, dafür aber die Differenz der Leitfähigkeitsänderung in den beiden Gebieten zu überschätzen. Um diesen Effekt abzumildern, haben wir bei der Erzeugung der in Abbildung 8, 9 gezeigten Bilder für L_{\min}^2 als Regularisierungsparameter $\lambda = 4$ gewählt. Man erkennt, daß die negative Leitfähigkeit etwas besser wiedergegeben wird als die positive. Dies liegt daran, daß eine Änderung der Leitfähigkeit bei $a_\delta = -50\%$ größeren Einfluß auf die Daten hat als bei $a_\delta = 50\%$. Daher ist der Einfluß des Strafterms bei positivem Kontrast stärker als bei einem gleichgroßen Kontrast mit negativem Vorzeichen.

5.3.2 Rekonstruktionen aus Phantomdaten

Bei den Phantomdaten handelt es sich um Messungen, die speziell zum Testen von Rekonstruktionsalgorithmen aufgenommen worden sind. Dazu wurde ein zylinderförmiger Trog mit elektrolytischer Flüssigkeit gefüllt und entlang einer zum Zylinderboden parallelen Ebene Elektroden äquidistant angebracht. Die Referenzmessung wurde ohne Objekt im Zylinder aufgenommen. Danach wurde ein kugelförmiges Objekt mit einer relativ zur Flüssigkeit um 30% reduzierten Leitfähigkeit eingebracht. Der Zylinder hat einen Durchmesser von 34cm und das Zielobjekt einen Durchmesser von 6cm. Bei den hier zur Rekonstruktion verwendeten Daten wurden die weiteren Messungen bei einem Abstand der Kugel von 7, 9, 11 und 13cm vom Rand des Zylinders aufgenommen. Phantomdaten stellen also ideale Meßdaten dar, weil die am Anfang dieses Abschnitts erwähnten Modellierungsfehler soweit wie möglich durch den Versuchsaufbau eliminiert worden sind.

Die rekonstruierten Bilder sind in Abbildung 10 aufgelistet. Die erste Spalte enthält die von BFIT erzeugten Bilder, die zweite die von L_{\min}^2 und die dritte die von L_{\min}^1 . Die schwach gestrichelte Linie im ersten Bild ist wieder der Startkreis, mit dem wir die Iteration von BFIT in allen vier Fällen gestartet haben. In den Bildern von BFIT ist die Lage des Zielobjekts getrichelt eingezeichnet. Für BFIT

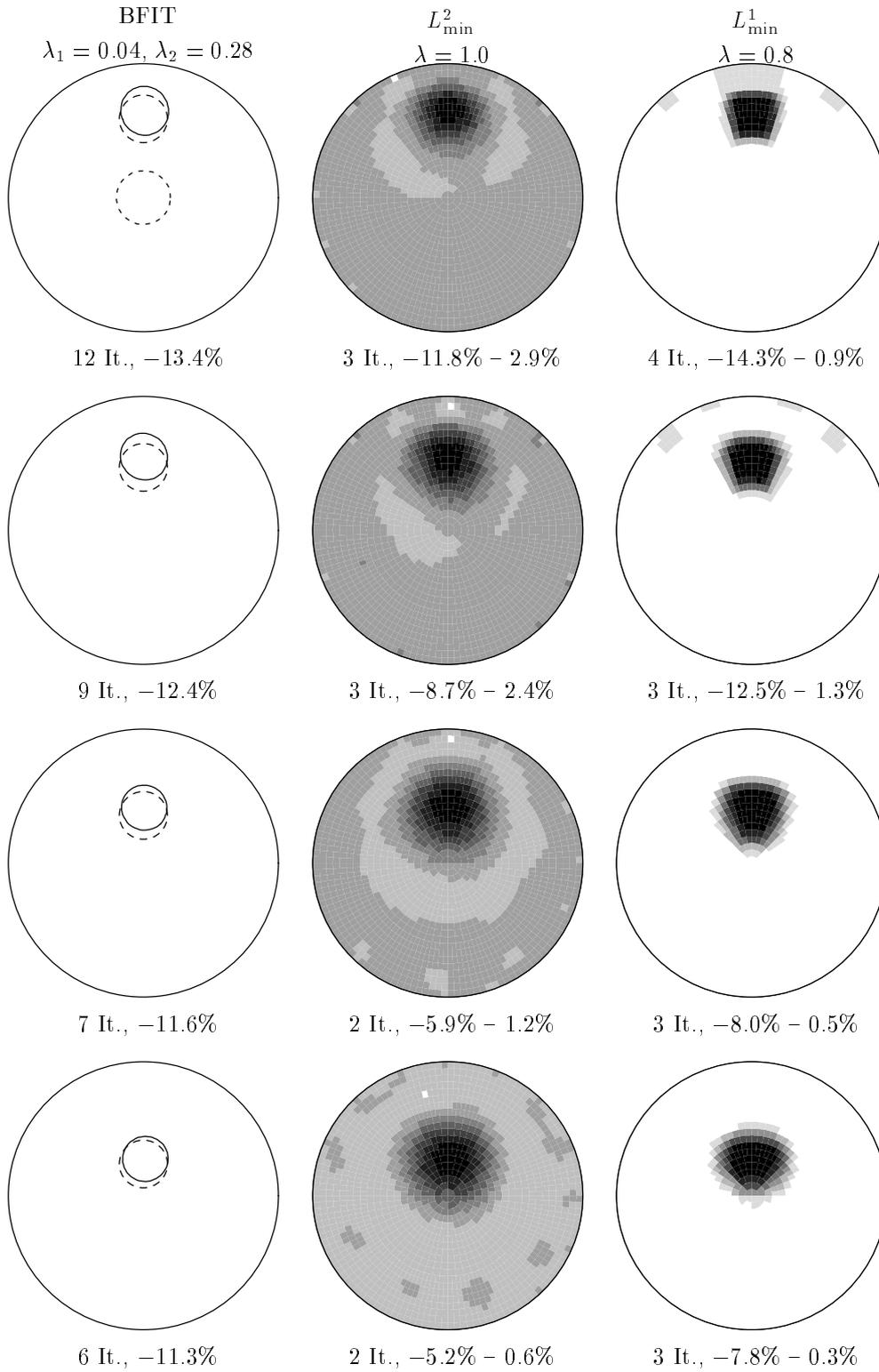


Abbildung 10: Rekonstruktionen aus Phantomdaten

haben wir als Randkurve diesmal die Ellipsen aus (5.23) angesetzt. Die Regularisierungsparameter für BFIT mußten erhöht werden, um noch die Konvergenz dieses Verfahrens in allen Fällen zu erreichen.

Zunächst einmal fällt auf, daß alle Rekonstruktionen den Kontrast erheblich unterschätzen. Dies kann man damit erklären, daß bei den Messungen der Strom auch außerhalb der Ebene der Elektroden fließt. Dadurch fallen die Spannungsänderungen kleiner aus, als sie von den zweidimensionalen Modellen vorausgesagt werden. Dieser Effekt wird umso stärker, je weiter das Objekt vom Rand entfernt ist. Hierbei dürfte es auch eine Rolle spielen, daß Objekte nahe des Zentrums verhältnismäßig kleine Spannungsänderungen liefern und daher der Einfluß der Regularisierung entsprechend groß ist.

Das Objekt wird in allen Rekonstruktionen gut lokalisiert. Die Tendenz von L_{\min}^2 , die Kanten zu verwischen, und von L_{\min}^1 , die Gebiete eckig darzustellen, ist auch hier wieder deutlich abzulesen. Auch erkennt man die Neigung von L_{\min}^2 zum „Gegenschwingen“. Bei einem Objekt mit negativer Leitfähigkeitsänderung findet L_{\min}^2 auch immer Regionen, die eine hierzu proportionale Leitfähigkeitsänderung in die umgekehrte Richtung aufweisen. Dieses Phänomen ist bei L_{\min}^1 viel schwächer ausgeprägt. Weil die Leitfähigkeitsänderungen stückweise konstant sind, liefert erwartungsgemäß BFIT die besten Rekonstruktionen. Bei der Bilderzeugung aus den Thoraxdaten im nächsten Abschnitt mußten die Regularisierungsparameter für BFIT noch höher gesetzt werden, um akzeptable Ergebnisse zu erhalten. Bei weiteren Experimenten hat sich gezeigt, daß BFIT mit diesen Parametern für die ersten beiden am Trog gemessenen Datensätzen nicht mehr konvergiert.

5.3.3 Rekonstruktionen aus Thoraxdaten

Als letztes zeigen wir Bilder aus Daten, die an einem menschlichen Thorax aufgenommen sind. Naturgemäß wissen wir bei diesen Daten nicht, was die Rekonstruktion idealerweise zeigen sollte. Aus diesem Grund zeigen wir Rekonstruktionen von zwei verschiedenen Meßreihen. Die erste Folge von Messungen wurde an einem aufrecht sitzenden Probanden vorgenommen. Anschließend wurde eine zweite Folge von Messungen aufgenommen, bei der die Testperson auf der rechten Seite lag. In der Seitenlage wird der rechte Lungenflügel stärker beatmet als der linke, und wir können überprüfen, ob wir diesen Effekt in den Bildern sehen können, die wir mit den hier vorgestellten Algorithmen erzeugen.

Die jeweils ersten Messungen in den beiden Lagen wurden als Referenzdatensätze verwendet. Sie sind bei einem mittleren Beatmungszustand aufgenommen. Anschließend atmete die Testperson spontan, also nicht betont tief, weiter. In Abständen von einer Sekunde wurden weitere Meßdaten aufgenommen. Wir haben jeweils Bilder aus den Messungen 1–9 nach der Referenzmessung erzeugt. Das erste Bild in der ersten Zeile in Abbildung 11 zeigt die Orientierung des Körpers in den Bildern. Der rechte Lungenflügel befindet sich in den Abbildungen unten.

Außerdem sind die Kreise eingezeichnet, mit denen BFIT gestartet worden ist. Es zeigt sich, daß man bei den am Thorax gemessenen Daten stark regularisieren muß, um noch brauchbare Ergebnisse zu erhalten. Für BFIT haben wir in allen Bildern $\lambda_1 = 0.03$ und $\lambda_2 = 0.8$ gewählt. Als radiale Abstandsfunktion wurde ein trigonometrisches Polynom zweiten Grades gewählt. Um einen Eindruck von dem Grad der Regularisierung zu vermitteln, zeigt das zweite Bild in der ersten Zeile der Abbildung 11 die Rekonstruktion des ersten „bohnenförmigen“ Gebietes aus Abschnitt 5.3.1 mit diesen Parametern.

Das letzte Bild dieser Zeile zeigt das mit L_{\min}^1 erzeugte Bild der ersten Messung in aufrechter Position. Man sieht, daß die Tendenz von L_{\min}^1 , die Gebiete eckig darzustellen, bei dieser Anwendung der Impedanztomographie zu unakzeptablen Ergebnissen führt. Bei der Bilderzeugung mit L_{\min}^2 traten große Störungen in den Bildpunkten auf, die an die Elektroden grenzen. In den meisten Fällen waren die Leitfähigkeitsänderungen in der Rekonstruktion in diesen Punkten wesentlich größer als die im Rest des Bildes. Auch L_{\min}^2 ist daher für die Bilderzeugung bei den Thoraxdaten nur bedingt brauchbar. Wie oben erwähnt, unterscheidet sich bei nicht zu großen Leitfähigkeitskontrasten bereits das im ersten Iterationsschritt von L_{\min}^2 erzeugte Bild nicht mehr wesentlich von den weiteren. Bei den Experimenten mit den synthetischen Daten waren die von L_{\min}^2 und L_{\min}^1 im ersten Schritt erzeugten Bilder bei nicht zu hohem Leitfähigkeitskontrast nahezu identisch. Bei den von L_{\min}^1 im ersten Schritt erzeugten Rekonstruktionen trat das Problem der Störungen an den Elektroden nur in wesentlich schwächerer Form auf. Es scheint also so zu sein, daß der in (5.15) verwendete Strafterm $\|\nabla_d \sigma_\delta\|_2^2$ die bei realen Messungen auftretenden Störungen besser unterdrückt als die Tikhonov-Regularisierung. Zu Vergleichszwecken zeigen wir, neben den von BFIT erzeugten Bildern, auch jeweils die von L_{\min}^1 mit $\lambda = 6.0$ im ersten Iterationsschritt generierten Rekonstruktionen. In den Abbildungen 11 – 14 sind in jeder Zeile die Bilder zu je drei aufeinander folgenden Messungen dargestellt. Die obere Zeile enthält die Rekonstruktionen von BFIT, die folgende die von L_{\min}^1 zu denselben Meßzeitpunkten. Die Zahlen in der Fußzeile der von BFIT erzeugten Bilder sind jeweils die Anzahl der Iterationen, der Kontrast im linken Lungenflügel und der Kontrast im rechten Lungenflügel. In den Abbildungen 11, 12 sind die Rekonstruktionen bei aufrechter Lage und in 13, 14 die in Seitenlage abgebildet. Zur Darstellung des Atemzyklus würde es sich anbieten, für die von L_{\min}^1 erzeugten Bilder eine über alle Meßzeitpunkte einheitliche Graustufeneinteilung zu wählen. Es ist dann an den Bildern unmittelbar zu erkennen, daß bei Messungen, in denen der Beatmungszustand der Lunge wieder annähernd denjenigen während der Referenzmessung erreicht hat, die Kontraste klein sind. Um die von Bildern von BFIT und L_{\min}^1 besser vergleichen zu können, haben wir hier aber die Graustufendarstellung für L_{\min}^1 jeweils über die maximalen Werte jedes einzelnen Bildes erstreckt. Weil die Leitfähigkeitskontraste in den Abbildungen relativ klein sind, haben wir auch LBFIT auf die Daten angewendet. Wiederum ergeben sich im Vergleich mit BFIT nur marginale Unterschiede. Bei der Bilderzeugung

aus Thoraxdaten kann man offensichtlich ohne Qualitätsverlust den wesentlich schnelleren Algorithmus LBFIT verwenden.

Die Atemzyklen sind in beiden Darstellungen klar zu erkennen. Auch der oben beschriebene Effekt der unterschiedlichen Beatmung der Lungenflügel in Seitenlage zeichnet sich deutlich ab. Die von BFIT konstruierten Gebiete grenzen in der Regel die Regionen ein, in denen auch der Kontrast in den von L_{\min}^1 erzeugten Bildern am größten ist. Auch die rekonstruierten Kontraste korrelieren gut. Die Rekonstruktionen von L_{\min}^1 zeigen deutlich die großen Störungen, die durch Meßfehler und ungenaue mathematische Modellierung bedingt sind. Erkennbar ist auch, daß L_{\min}^1 bei Abbruch nach dem ersten Schritt ähnlich wie L_{\min}^2 „genschwingt“. Durch die Einschränkung auf stückweise konstante Leitfähigkeiten in BFIT werden diese Effekte vermieden. Bei den Anwendungen in der Medizin möchte man aus den Bildern weitere Daten, beispielsweise die Schwerpunkte der Lungenflügel, ableiten. Bei Rekonstruktionsalgorithmen, die das Bild in Pixeln liefern, müssen hierfür zunächst mit Konturerkennungsverfahren die Umrisse der Lungenflügel bestimmt werden. Ein weiterer Vorteil von BFIT und LBFIT ist es, daß sich solche Daten aus den Kurven ohne Schwierigkeiten ableiten lassen.

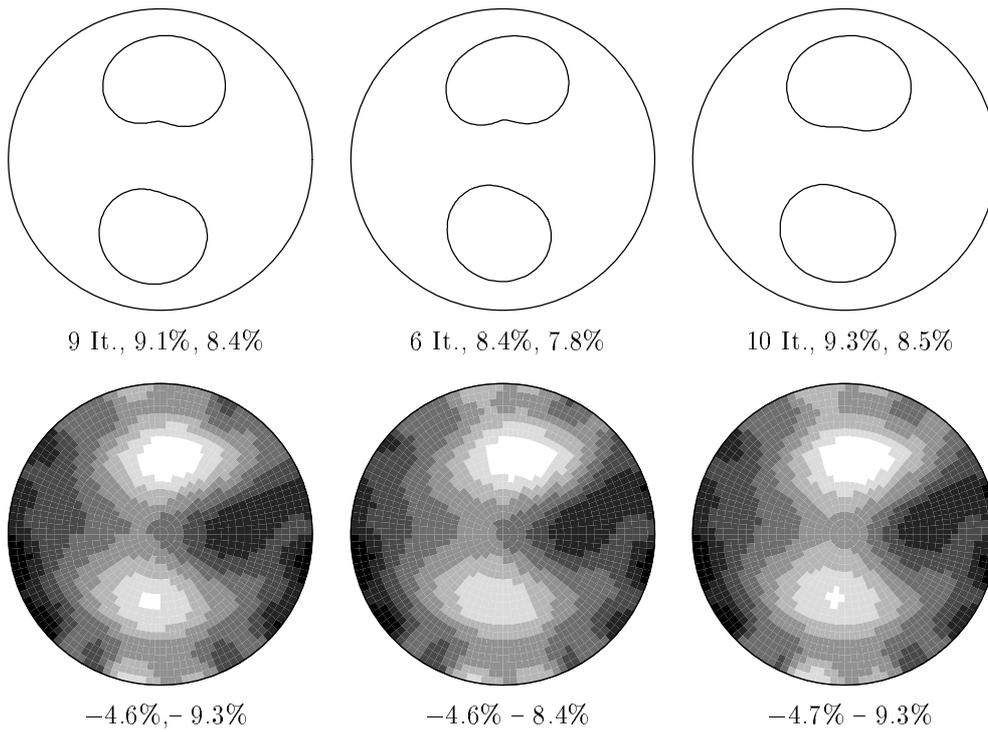
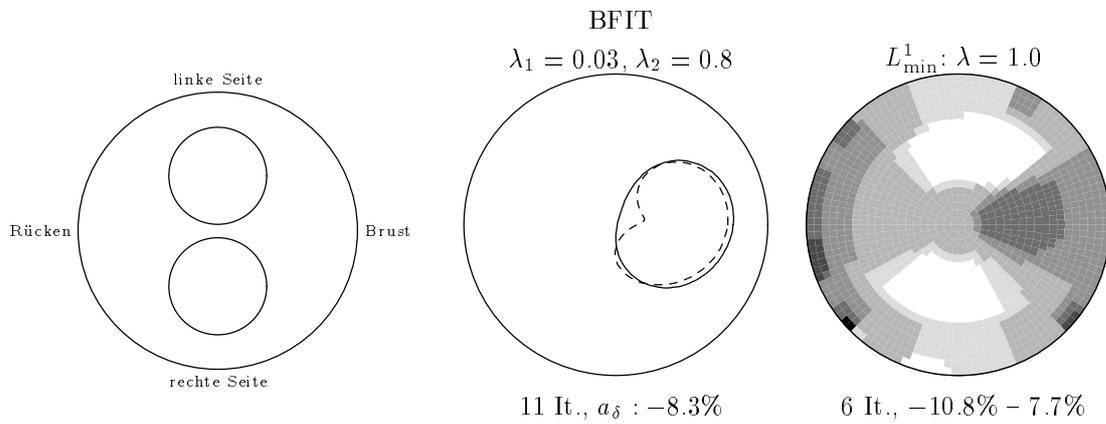


Abbildung 11: Thoraxbilder, aufrecht sitzend, Messungen nach 1 – 3 Sekunden

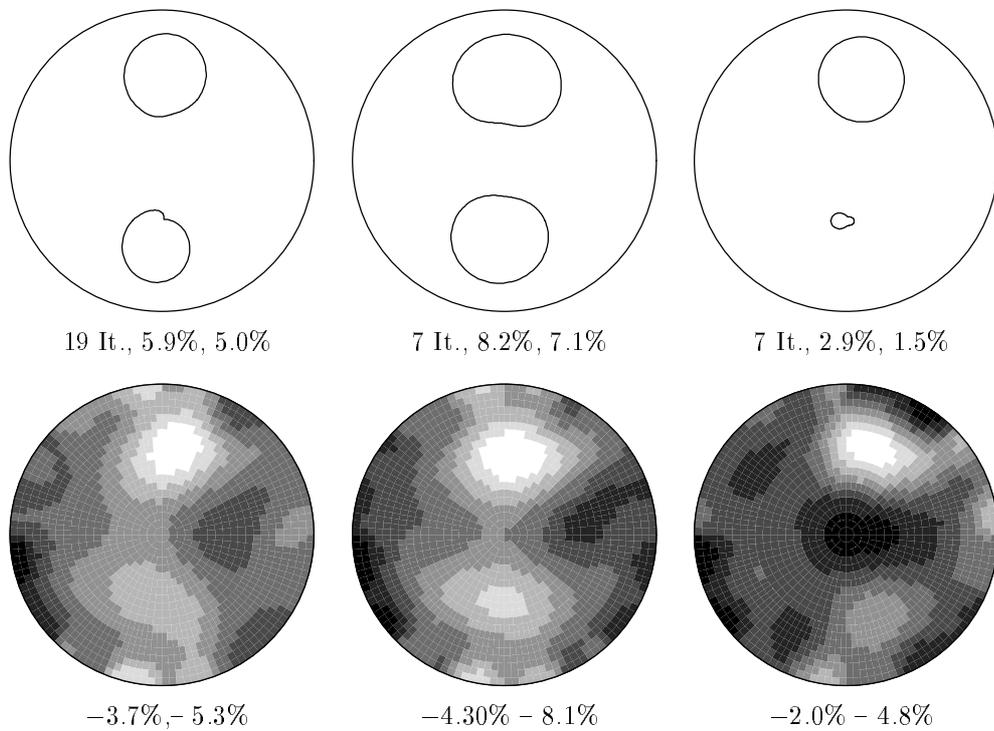
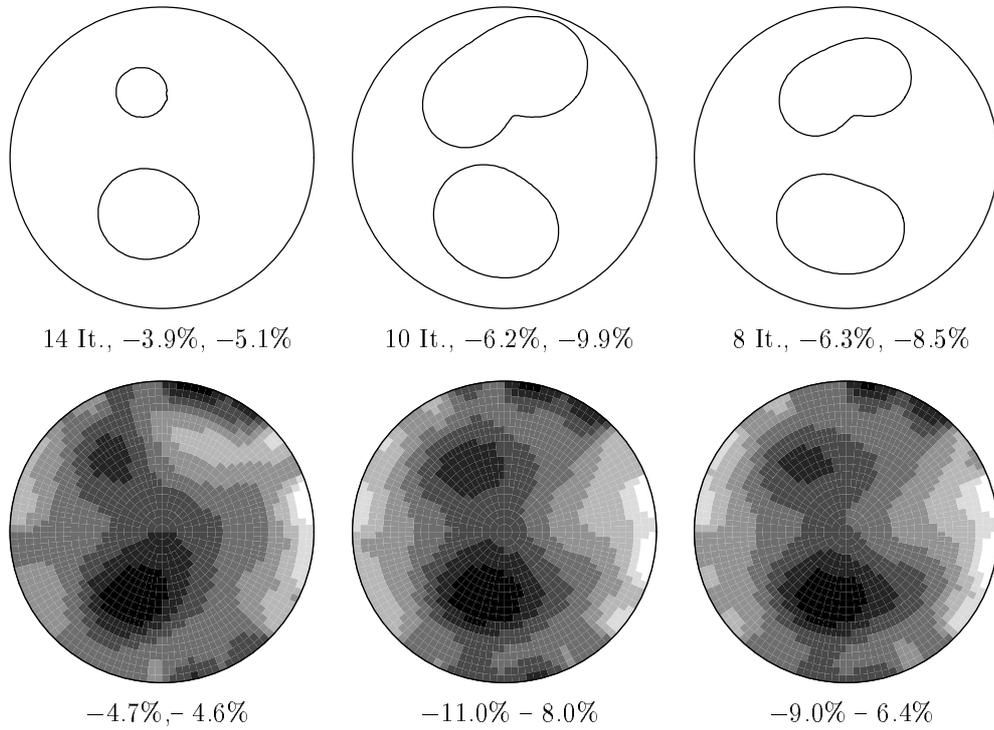


Abbildung 12: Thoraxbilder, aufrecht sitzend, Messungen nach 4 – 9 Sekunden

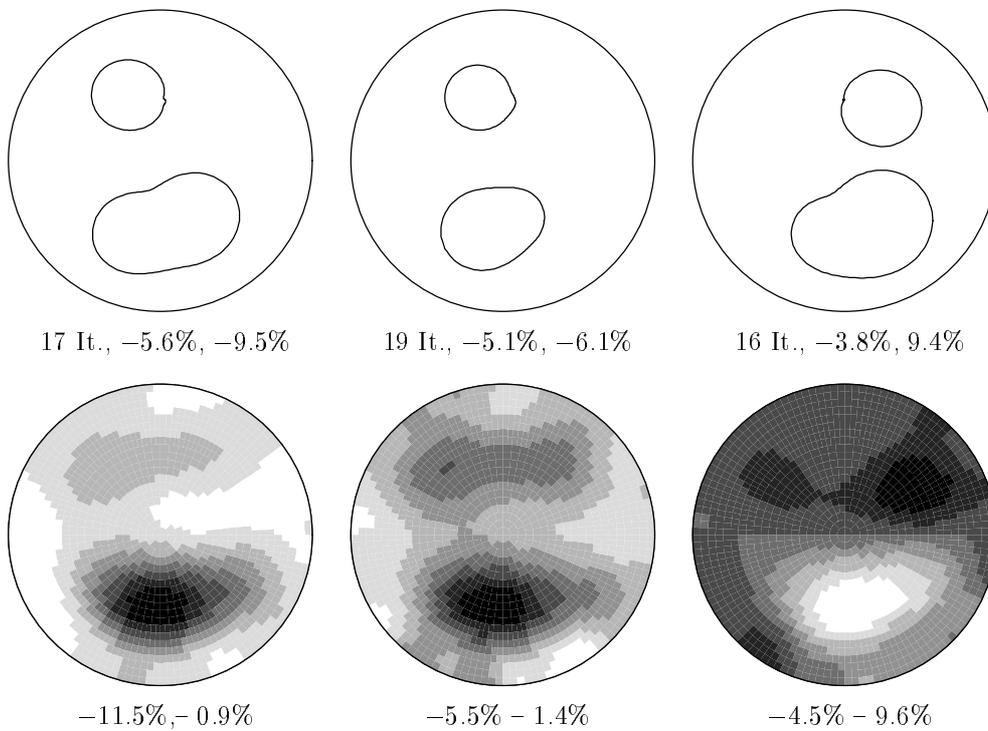
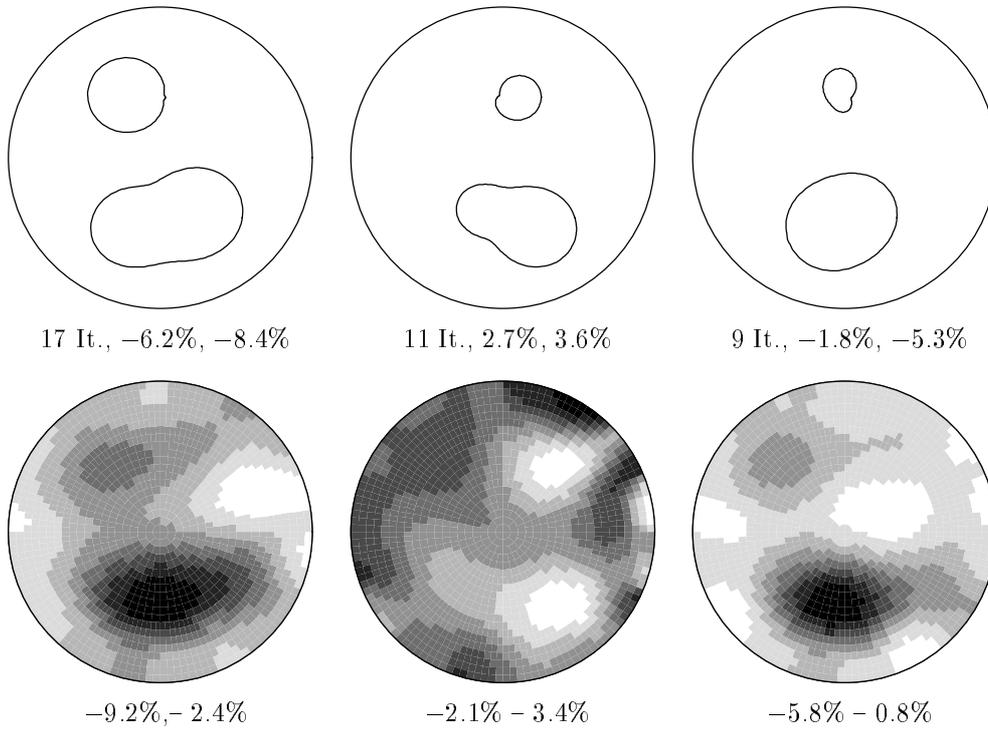


Abbildung 13: Thoraxbilder, Seitenlage, Messungen nach 1 – 6 Sekunden

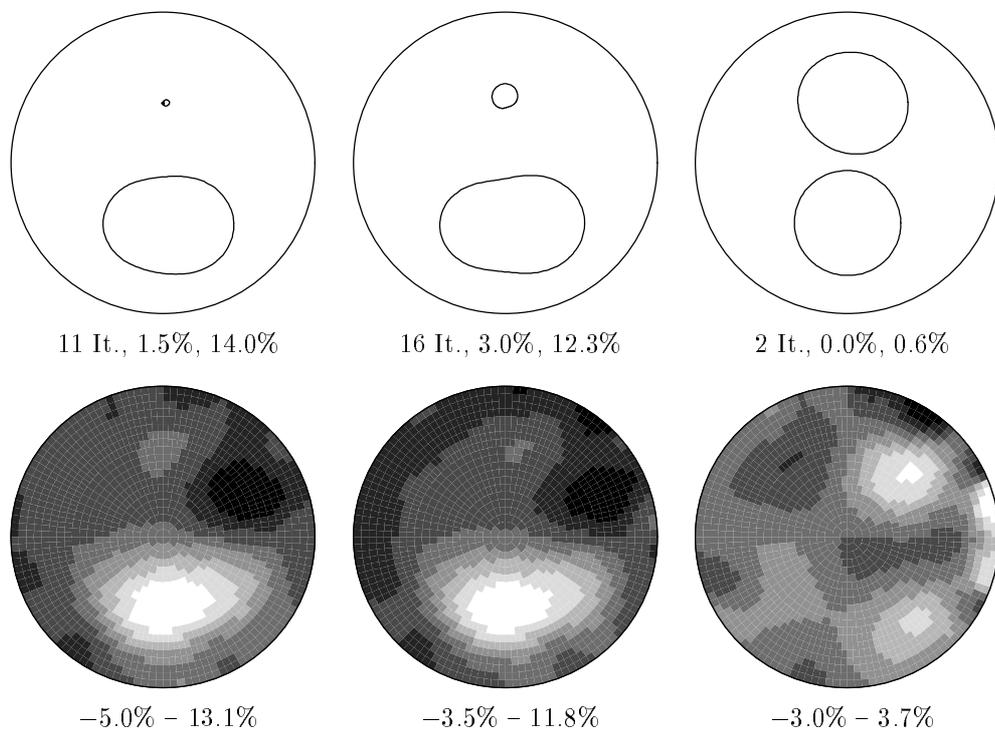


Abbildung 14: Thoraxbilder, Seitenlage, Messungen nach 7 – 9 Sekunden

Literatur

- [1] Acar, R. and C. R. Vogel: *Analysis of bounded variation penalty methods for ill-posed problems*. Inverse Problems, 10:1217–29, 1994.
- [2] Alessandrini, G., V. Isakov, and J. Powell: *Local uniqueness in the inverse conductivity problem with one measurement*. Trans. Amer. Math. Soc., 347:3031–41, 1995.
- [3] Barber, D. and B. Brown: *Progress in electrical impedance tomography*. In *Inverse Problems in Partial Differential Equations*, pages 151–164. SIAM, 1990.
- [4] Bellout, H. and A. Friedman: *Identification problems in potential theory*. Arch. Rat. Mech. Anal., 101:143–160, 1988.
- [5] Bellout, H., A. Friedman, and V. Isakov: *Stability for an inverse problem in potential theory*. Trans. Amer. Math. Soc., 332:271–296, 1992.
- [6] Coleman, T. F. and Y. Li: *A globally and quadratically convergent affine scaling method for linear ℓ_1 problems*. Mathematical Programming, 56:189–222, 1992.
- [7] Colton, D. and R. Kress: *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. Wiley-Interscience Publication, New York, 1983.
- [8] Courant, R. und D. Hilbert: *Methoden der mathematischen Physik*, Band 2. Springer-Verlag, 1937.
- [9] Dobson, D. C. and F. Santosa: *An image-enhancement technique for electrical impedance tomography*. Inverse Problems, 10:317–334, 1994.
- [10] Fischer, W. und I. Lieb: *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionentheorie*. Vieweg, Braunschweig, 1988.
- [11] Fischer, W. und I. Lieb: *Funktionentheorie*. Vieweg, Braunschweig, siebte Auflage, 1992.
- [12] Friedman, A. and V. Isakov: *On the uniqueness in the inverse conductivity problem with one measurement*. Indiana Univ. Math. J., 38:563–579, 1989.
- [13] Gakhov, F. D.: *Boundary Value Problems*. Pergamon Press, Oxford, 1966.
- [14] George, J. A. and J. W. Liu: *Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems*. Prentice-Hall, New York, 1981.
- [15] Geselowitz, D. B.: *An application of electrocardiographic lead theory to impedance plethysmography*. IEEE Trans. Biomed. Eng., 40:1328–30, 1971.

-
- [16] Hettlich, F.: *Fréchet derivatives in inverse obstacle scattering*. Inverse Problems, 11:371–382, 1995.
- [17] Hofmann, B.: *Penalty methods for the inverse problem in EIT*. Phys. Meas., 17:A73–A76, 1996. Supplement 4A.
- [18] Isakov, V.: *On the uniqueness of recovery of a discontinuous conductivity coefficient*. Comm. Pure Appl. Math., 41:865–877, 1988.
- [19] Isakov, V.: *Inverse Source Problems*, volume 34 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.
- [20] Isakov, V. and J. Powell: *On the inverse conductivity problem with one measurement*. Inverse Problems, 6:311–318, 1990.
- [21] Kirsch, A.: *Surface gradients and continuity properties for some integral operators in classical scattering theory*. Math. Meth. Appl. Sciences, 11:789–804, 1989.
- [22] Kohn, R. V. and M. Vogelius: *Determining conductivity by boundary measurements II. Interior results*. Comm. Pure Appl. Math., 38:643–667, 1985.
- [23] Kress, R.: *Linear Integral Equations*. Springer Verlag, Berlin, 1989.
- [24] Muskhelishvili, N. I.: *Singular Integral Equations*. Noordhoff, Groningen, 1953.
- [25] Nachman, A. I.: *Global uniqueness for a two-dimensional inverse boundary problem*. Annals of Math., 143:71–96, 1996.
- [26] Paulson, K. S., W. R. Breckon, and M. Pidcock: *Electrode modelling in electrical impedance tomography*. SIAM J. Appl. Math., 52:1012–22, 1992.
- [27] Potthast, R.: *Fréchet differentiability of boundary integral operators and its application to an inverse acoustic scattering problem*. Inverse Problems, 10:431–447, 1994.
- [28] Potthast, R.: *Fréchet-Differenzierbarkeit von Randintegraloperatoren und Randwertproblemen zur Helmholtzgleichung und den zeitharmonischen Maxwellgleichungen*. Doktorarbeit, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik der Universität Göttingen, 1994.
- [29] Powell, J.: *On a small perturbation in the two-dimensional inverse conductivity problem*. J. Math. Anal. Appl., 175:292–304, 1993.
- [30] Smirnov, V.: *Über die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung*. Math. An., 107:313–323, 1933.

-
- [31] Sylvester, J. and G. Uhlmann: *A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem*. *Annals of Math.*, 125:153–169, 1987.
- [32] Taylor, M. E.: *Partial Differential Equations I, Basic Theory*. Springer Verlag, New York, 1996.
- [33] Treves, F.: *Basic Linear Partial Differential Equations*. Academic Press, New York, 1975.