GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT
GÖTTINGEN

Bachelorarbeit

Online-Algorithmen für das Management von Blutdepots

erstellt von:

Stephanie Walterscheid

aus Neunkirchen-Seelscheid

Matrikelnummer: 11134865

am Institut für Numerische und Angewandte Mathematik

Lotzestr. 16-18

37083 Göttingen

Erstgutachter: Prof. Dr. Stephan Westphal

Zweitgutachterin: Prof. Dr. Anita Schöbel

Göttingen, 27. Mai 2013

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich zunächst bei all denjenigen bedanken, die mich so tatkräftig bei der Anfertigung dieser Bachelorarbeit unterstützt und motiviert haben.

Mein besonderer Dank richtet sich an Marco Bender, der mich bei der Erstellung dieser Arbeit zu jedem Augenblick beraten und begleitet hat. Hierbei war er stets engagiert und half mir durch neue Gedankenanstöße auch schwierig geglaubte Situationen zu meistern. Außerdem gab mir der Austausch über aktuelle Arbeitsstände die nötige Sicherheit die Problemstellung ergebnisorientiert bearbeiten zu können.

Ebenfalls möchte ich mich bei meinem begleitenden Professor Herrn Westphal bedanken. Dieser hatte immer ein offenes Ohr für meine Anliegen und gab mir so die erforderliche Hilfestellung, um diese Arbeit anfertigen zu können. Seine klaren Themenvorstellungen waren eine große Hilfe für eine zielgerichtete Erstellung dieser Arbeit.

Daneben gilt mein ganz spezieller Dank meinem Freund, der in zahlreichen Stunden Korrektur gelesen hat. Auch als Fachfremder hatte er stets die Zeit und Geduld sich meine Gedankengänge anzuhören, auch wenn diese ihm oftmals als sehr abstrakt erschienen. Bei seinen umfangreichen Korrekturen wies er immer auf Schwächen und Verbesserungsmöglichkeiten hin. Des Weiteren sorgte er als fachfremde Leser für neue Blickwinkel.

Gleichzeitig möchte ich auch einigen Kommilitonen meinen Dank aussprechen, die mich sowohl während des Studiums als auch im Rahmen meiner Abschlussarbeit unterstützt haben. Fachspezifische Diskussionen halfen mir immer wieder über den Tellerrand hinaus zu schauen.

Nicht zuletzt gilt mein Dank auch meinen Eltern, die mir nicht nur während meiner Bachelorarbeit, sondern über dies hinaus schon während der gesamten Studienzeit zur Seite standen. Hierbei unterstützten sie mich sowohl mental als auch finanziell. In den letzten Monaten meines Studiums waren sie ebenfalls in die Korrektur meiner Abschlussarbeit involviert.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

„Blut ist ein ganz besondere Saft“ [GT97], so beschrieb schon Johann Wolfgang von Goethe in seinem Werk „Faust“ die Bedeutung des roten Lebenselexiers.

Blut ist neben dem Herzen der wichtigste Bestandteil des menschlichen Körpers. Angetrieben vom Herzen pulsiert es durch den gesamten Körper bis in jedes kleinste Gefäß. Zu der Vielzahl seiner lebenswichtigen Funktionen gehört der Transport von Sauerstoff, Nährstoffen und Hormonen, aber auch der Transport von Abbaustoffen. Außerdem dient es zur Wärmeregulation im Körper. Der Blutkreislauf ist somit für die Versorgung des gesamten Körpers zuständig und daher überlebenswichtig [DCF]. Um so wichtiger ist es, als gesunder Mensch Blut zu spenden und so die Herstellung von Blutkonserven, den so genannten Erythrozytenkonzentraten [MDI], sicher zu stellen. Nur so kann bedürftigen Menschen geholfen und eine neue Lebensperspektive geschenkt werden.

Alleine in Deutschland wurden laut einem Bericht des Paul-Ehrlich-Instituts vom 31.11.2012 im Jahr 2011 circa $4,8$ Millionen Erythrozytenkonzentrate hergestellt. Allerdings tritt bereits beim Hersteller eine Verfallsquote von etwa $2,75$ % auf. Dies entspricht einer Anzahl von etwa 132.000 verfallenen Blutkonserven. Daher gelangen letztendlich nur ungefähr $4,7$ Millionen Erythrozytenkonzentrate in den Verkehr und somit zu den Verbrauchern, wie dem Klinikum Emden. So wurde 2011 ein Verbrauch von etwa $4,5$ Millionen Blutkonserven bei den Endverbrauchern registriert [PEI13]. Aufgrund der geringen Haltbarkeitszeit von 42 Tagen nach Blutentnahme und der fehlerhaften Bestellpolitik vieler Kliniken, verfällt ein Großteil der Erythrozytenkonzentrate, bevor sie beim Empfänger angewendet werden können [BZD08], [DRK12]. Der daraus resultierende Verfall von Blutkonserven beim Anwender lag im Jahr 2011 bei 178.000 Stück, was einer Verfallsrate von $3,83$ % entspricht [PEI13].

Das nachstehende Säulendiagramm zeigt das Verhältnis zwischen dem Verbrauch und dem Verfall der Erythrozytenkonzentrate.

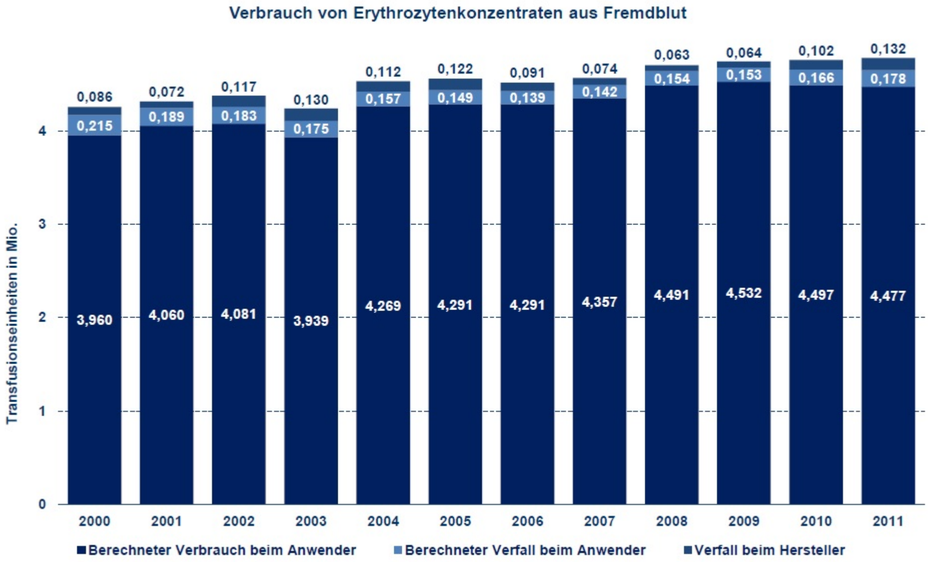

Abbildung 1.1: Verbrauch und Verfall von Erythrozytenkonzentraten [PEI13]

Aufgrund des fortschreitenden demografischen Wandels besteht zusätzlich die Problematik, dass zukünftig der Anteil älterer Menschen überproportional steigen wird und somit auch die Anzahl derer steigt, die Blutkonserven benötigen. Gleichzeitig nimmt die Bevölkerungsdichte der jüngeren Menschen ab, sodass auch die Zahl der als Blutspender in Frage kommenden Personen sinkt [DÄB10].
In Folge dessen wird ein Mangel an Erythrozytenkonzentraten entstehen. Somit muss es das Ziel sein mehr Menschen zum Blutspenden zu bewegen, aber vor allem auch die Verfallsraten zu minimieren, um die knapp werdenden, wertvollen Ressourcen optimal nutzen zu können. Dabei wird auch eine Optimierung des Bestellverhaltens der Anwender eine wichtige Rolle spielen.

Eine vergleichbare Problematik weist das Hans-Susemihl-Krankenhaus in Emden auf. Auch hier liegt ein zu hoher Verfall von Erythrozytenkonzentraten vor. Diese Thematik lieferte den Impuls für die Anfertigung der nachstehenden Arbeit [MQ12].

1.1 Zielsetzung

In dieser Bachelorarbeit wollen wir anhand des beispielhaften Sachverhaltes im Klinikum Emden versuchen die Verfallsrate zu senken, indem wir die entstehenden Bestellkosten der Blutkonserven minimieren, da sich diese unmittelbar auf die Verfallsrate auswirken. Dazu werden wir im Folgenden kurz die Situation im Krankenhaus Emden beschreiben.

Bei anstehenden Operationen in Kliniken ist es notwendig, die eventuelle Versorgung mit bluttypentsprechenden Konserven zu gewährleisten. Hierbei ist es üblich, dass die Blutkonserven vor einem Eingriff bestellt werden. Im Klinikum Emden gestaltet sich dieser Vorgang so, dass der Operationsplan für den nächsten Tag erst zur Mittagszeit des Vortages vorliegt. Da der reguläre Bestellzeitpunkt jedoch schon vormittags ist und die Lieferung etwa einen Tag benötigt, ist es zu diesem Zeitpunkt nicht mehr möglich operationsspezifisch zu bestellen. Aus diesem Grund wird hier nach einem aus Erfahrungswerten entstandenen Lagerbestand vorgehalten. Dieser enthält immer eine gewisse Anzahl an Erythrozytenkonzentraten, zusammengesetzt aus den verschiedenen Blutgruppen. Für den kommenden Tag fehlende Erythrozytenkonzentrate können, um die Versorgung zu gewährleisten, nur kurzfristig durch einen sehr teuren Expressversand nachbestellt werden. Daher gilt es, die durch die sehr kurzfristige Planung entstehenden Kosten zu minimieren. Zusätzlich erhöht ein hoher Lagerbestand die Gefahr, dass die Haltbarkeitsdauer der Konserven überschritten wird [MQ12].

Um bei dem Management von Blutdepots die Bestellmengen und die damit verbundenen Kosten, sowie die Verfallsrate der Erythrozytenkonzentrate zu minimieren, stellt sich die Frage, wie viele Blutkonserven auf welche Art und Weise bestellt werden sollen. Demnach suchen wir eine optimale Bestellstrategie. Hierbei werden wir sehen, dass wenn zum Beispiel der Operationsplan einen halben Tag vorher erscheint, die Kosten schon gesenkt werden können und folglich auch die Verfallsrate.

Eine Möglichkeit dieses Problem anzugehen ist die Betrachtung von Online-Algorithmen und der kompetitiven Analyse. Dabei wird einem Algorithmus eine Anfragesequenz von möglichen Blutkonservenanfragen übergeben, für die er eine Lösung berechnen muss. Die daraus entstandenen Kosten werden dann mit den optimalen Kosten für die Anfragesequenz verglichen um zu prüfen, „wie gut“ der Algorithmus ist.

2 Grundlagen

Zu Beginn dieser Arbeit wollen wir einige grundlegende Definitionen und Notationen der Online-Optimierung festlegen.

Definition 2.1. **(Optimierungsproblem** [WP07, S.8]**)** Eine Instanz eines Optimierungsproblems ist durch eine Menge χ an zulässigen Lösungen und eine Kostenfunkion $c : \chi \to \mathbb{R}$ gegeben. Eine Lösung $x^* \in \chi$ ist eine optimale Lösung des zugehörigen Minimierungsproblems, falls $c(x^*) \leq c(x)$ gilt für alle $x \in \chi$.
Analog ist $x^* \in \chi$ eine optimale Lösung des zugehörigen Maximierungsproblems, falls $c(x^*) \geq c(x)$ für alle $x \in \chi$ gilt.

Im Laufe dieser Arbeit werden wir nur Minimierungsprobleme begutachten, da generell nur gleichartige Probleme miteinander verglichen werden.
Mithilfe von Algorithmen kann eine Lösung für ein solches Problem berechnet werden. Ein **Algorithmus** ist ein Verfahren, das für eine gegebene Instanz I eine Lösung bestimmt [CLR96, S.1]. Hierbei entstehen durch einen Algorithmus ALG Kosten, die wir mit $ALG(I)$ bezeichnen. Die optimale Lösung für das Problem bezeichnen wir mit $OPT(I)$ [KR03, S.8].

Für die Untersuchung von Optimierungsproblemen benötigt man für gewöhnlich alle Informationen und Daten des zu betrachtenden Problems. In der Praxis ist dies jedoch häufig nicht der Fall. Oftmals müssen daher Entscheidungen schon vor dem Erhalt aller Informationen getroffen werden [WP07, S.9]. Diese Art von Optimierungsproblemen nennen wir **Online-Probleme**.

Ein **Online-Problem** ist ein Optimierungsproblem, bei dem jede Eingabeinstanz in Form einer endlichen Folge $\sigma = (r_1, \ldots, r_n)$ von Anfragen (**Requests**) geliefert wird [KR03, S.8]. Für diese berechnet ein **Online-Algorithmus** ALG eine Lösungsfolge $a_1, \ldots, a_n$ mit Kosten von $ALG(\sigma)$ [KR03, S.8]. Dabei muss der Online-Algorithmus alle Requests nacheinander abarbeiten, das heißt er muss eine Entscheidung für den Request r_i treffen, bevor er r_{i+1} erhält [WP07, S.10]. Der Algorithmus agiert demzufolge auf der Basis von vergangenen Ereignissen [BEY98, S.xiii], [FW98, S.4]. Im Gegensatz dazu hat der optimale Algorithmus, auch **Optimaler Offline-Algorithmus** genannt, vollständiges Wissen über die in der Zukunft liegenden Anfragen und die

Vorgehensweise des Online-Algorithmus. Deshalb berechnet dieser immer die optimalen Kosten $OPT(\sigma)$ [BEY98, S.2].

Um eine Antwort auf die Frage zu erhalten, welcher Algorithmus der „Beste“ ist [FW98, S.1], werden wir eine **kompetitive Analyse** durchführen. Hierbei wird die Qualität eines Online-Algorithmus am Quotienten zwischen dem Worst Case Verhalten des Online-Algorithmus bei einer gegebenen Instanz σ und dem Verhalten des optimalen Offline-Algorithmus auf derselben Instanz gemessen [BEY98, S.xiii], [FW98, S.2].
Der so beschriebene Quotient führt zur Definition der Kompetitivität.

Definition 2.2. (Kompetitivität für Deterministische Online-Algorithmen [BEY98, S.3], [WP07, S.10]**)** Ein deterministischer Online-Algorithmus ALG ist **c$-$kompetitiv**, wenn es eine Konstante α gibt, so dass für alle endlichen Eingabefolgen σ gilt:

$$ALG(\sigma) \leq c \cdot OPT(\sigma) + \alpha.$$

Für $\alpha = 0$ ist der Algorithmus **strikt c$-$kompetitiv**. Die Kompetitivität eines Online-Algorithmus ist das Infimum über alle c, so dass der Algorithmus c-kompetitiv ist.

Je kleiner c, die Kompetitivität (**Competitiv Ratio**) ist, desto besser ist der Online-Algorithmus [BEY98, S.3].
Daher können wir anschaulich die kompetitive Analyse von Online-Algorithmen als „Spiel“ zwischen einem „Online-Spieler“ und einem „böswilligen Gegner“ (**Adversary**) darstellen. Oftmals wird dabei der Adversary und der optimalen Offline-Algorithmus zusammen als „Offline-Spieler“ bezeichnet. Dieser hat bei deterministischen Algorithmen vollständiges Wissen über den Online-Algorithmus und die in der Zukunft liegenden Ereignisse. Aufgrund dieses Wissens versucht der Adversary eine Anfragesequenz σ so zu konstruieren, dass sie möglichst „schlecht“ für den Algorithmus aber zugleich „gut“ für den Offline-Algorithmus ist. Demzufolge ist es das Ziel des Adversarys, die Kompetitivität nach Möglichkeit zu maximieren [BEY98, S.3/4]. Im Gegensatz dazu wollen wir, beziehungsweise der Online-Spieler, die Kompetitivität minimieren, indem wir einen Algorithmus suchen, der unter diesen genannten Bedingungen eine möglichst „gute“ Lösung liefert.

Das beschriebene Problemfeld der Klinik in Emden lässt sich als Online-Problem auffassen, da zum einen ein Kostenminimierungsproblem vorliegt und zum anderen Bestellentscheidungen zu einem Zeitpunkt getroffen werden müssen, zudem noch nicht alle nötigen Informationen, vorliegen. Ohne zu wissen welche Operationen anstehen und welche Blutkonserven dementsprechend benötigt werden, muss eine bestimmt Anzahl an Konserven bestellt werden.

Im nächsten Kapitel wollen wir nun mit der Betrachtung des Optimierungsproblems durch deterministische Online-Algorithmen beginnen.

3 Deterministische Online-Algorithmen

Zuallererst wollen wir verschiedene deterministische Online-Algorithmen betrachten und sie daraufhin untersuchen, wie „gut“ oder wie „schlecht“ sie das Optimierungsproblem lösen. Demzufolge werden wir uns anschauen welche Kompetitivität sie haben.

Deterministische Online-Algorithmen reagieren immer auf dieselbe Weise auf identische Anfrageinstanzen [WP07, S.10]. Da es sehr viele Möglichkeiten gibt deterministische Strategien zu entwickeln müssen wir zunächst ein Modell definieren, mit dem wir arbeiten werden. Dazu treffen wir die nachstehenden Annahmen.
Um eine optimale Bestellstrategie für das Management von Blutdepots zu entwickeln, betrachten wir den Spezialfall, in dem die Blutkonserven alle unendlich lange haltbar sind. Außerdem zerfällt unser gesamtes Bestellproblem sofort in einzelne Teilprobleme, die jeweils nur eine einzige Blutgruppe betrachten.
Des Weiteren treffen wir die Annahme, dass ein Algorithmus zwischen zwei Bestellvarianten, der Normal- und der Expressbestellung, wählen kann. Die Normalbestellung verursacht Kosten von 1 und ist innerhalb eines Tages lieferbar, hingegen verursacht die Expressbestellung Kosten von $\beta > 1$ und ist sofort erhältlich.
Zu Beginn einer Bestellperiode (zum Beispiel zum Tagesbeginn) erhält der Algorithmus eine Anfragefolge $\sigma = (r_1, \ldots, r_n)$ von Blutrequests. Diese Sequenz σ können wir als Operationplan für den nächsten Tag ansehen. Für jeden Tag erhalten wir somit eine gewisse Anzahl n an geplanten Eingriffen r_i, für die möglicherweise der Bedarf einer Blutkonserve besteht. Allerdings wissen wir nicht, wie viele der angefragten Konserven tatsächlich benötigt werden.
Für die Bestellung der Erythrozytenkonzentrate gibt es verschiedene Zeitpunkte. Wir können sie sowohl zu Beginn einer Periode zum Normalpreis bestellen, als auch zu einem späteren Tageszeitpunkt, jedoch dann nur noch im Rahmen der Expressbestellung, wie in Abbildung 3.1 dargestellt wird.
Hierbei macht es keinen Unterschied, ob man die einzelnen Tagesbeginne oder den Anfang einer längeren Periode, wie zum Beispiel einer gesamten Woche, betrachtet. Mit diesen Annahmen zerfällt der Betrachtungszeitraum in kleinere Perioden, sodass wir einzelne Tage betrachten können.
Des Weiteren werden die Konserven jeweils für den möglichen Verwendungszeitraum geblockt.

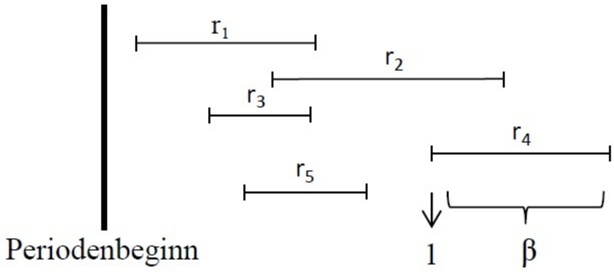

Abbildung 3.1: Anfragefolge für einen Tag

Durch die getroffenen Annahmen haben wir hier eine längerfristige Planung beschrieben, als sie tatsächlich in Emden vorliegt.
Die gesamte Haltbarkeitsproblematik der Blutkonserven beim Management von Blutdepots wollen wir zunächst außer Acht lassen und zu einem späteren Zeitpunkt in Kapitel 5 betrachten.

3.1 Erste Strategien

Die zwei naheliegendsten und einfachsten Bestellvarianten sind zum einen die Normalbestellungs- und zum anderen die Expressbestellungs-Strategie. Diese werden wir im Folgenden untersuchen.

Algorithmus Normalbestellung (NB):
Der deterministische Online Algorithmus NB bestellt die Erythrozytenkonzentrate immer zu Beginn der Periode zum Normalpreis von 1 pro Stück.

Satz 3.1. *Der Algorithmus NB ist nicht kompetitiv.*

Beweis. Der Algorithmus NB verursacht insgesamt Kosten von

$$NB(\sigma) = n \cdot 1 = n$$

bei n Anfragen. Der Adversary übergibt dem Algorithmus NB eine Sequenz $\sigma = (r_i, \ldots, r_n)$ von Anfragen, die nie eintreten werden, das heißt es wird keine Blutkonserve benötigt. Daraus folgt, dass der optimale Offline-Algorithmus keine Kosten verursacht, also

$$OPT(\sigma) = 0.$$

Folglich ist NB nicht kompetitiv. $\square$

Genau das Gegenteil vom Algorithmus NB ist die Möglichkeit alle Anfragen mit Expressbestellung zu beantworten.

Algorithmus Expressbestellung (EX):
Der deterministische Online Algorithmus EX kann die Blutkonserven zu jedem Zeitpunkt der Periode bestellen, wenn sie benötigt werden. Allerdings kann er dies nur per Express zu Kosten von β.

Satz 3.2. *Der Algorithmus EX ist β-kompetitiv.*

Beweis. Der Algorithmus EX verursacht bei n Anfragen, die er mit Expressbestellen beantwortet, insgesamt Kosten von

$$EX(\sigma) = d \cdot \beta$$

mit d, der tatsächlich benötigten Anzahl an Blutkonserven. Der Adversary übergibt dem Algorithmus EX also eine Sequenz σ von Anfragen, dass d der insgesamt n angefragten Blutkonserven benötigt werden. Der optimale Offline-Algorithmus bestellt diesbezüglich d Konserven zu Beginn der Periode zum Normalpreis und verursacht folglich Kosten von

$$OPT(\sigma) = d \cdot 1 = d\ .$$

Der deterministische Online-Algorithmus EX ist daher c-kompetitiv mit

$$c = \frac{EX(\sigma)}{OPT(\sigma)} = \frac{(d \cdot \beta)}{d} = \beta \qquad \forall \sigma.$$

$\square$

Die Expressbestellungs-Strategie ist also genau β-mal so teuer, wie die optimalen Offline-Kosten, die der tatsächlich benötigte Menge d entsprechen.

Satz 3.3. *Kein deterministischer Online-Algorithmus ALG kann eine bessere Kompetitivität als β erreichen, das heißt die Schranke β ist scharf.*

Beweis. Wir betrachten die Menge aller deterministischen Algorithmen.
Seien dazu ALG_i, mit $i \geq 1$, alle beliebigen deterministischen Algorithmen, die i

Konserven immer nur zu Beginn einer Periode zum Normalpreis von 1 bestellen und danach keine mehr. Diese Algorithmen sind nach Satz 3.1 alle nicht kompetitiv.
Um kompetitiv zu sein, darf der Algorithmus keine Blutkonserven zum Normalpreis von 1 kaufen, sondern er darf nur auf die Expressbestellung zurückgreifen. Aus Satz 3.2 folgt direkt, dass dieser Algorithmus immer β-kompetitiv ist, egal wie viele Konserven er kauft.

□

Da es nicht sinnvoll ist, nur per Express zu bestellen um kompetitiv zu sein, versuchen wir im Folgenden eine bessere Kompetitivität als β zu finden, indem wir unser Model einschränken.

3.2 Weitere Strategien und Kompetitivitätsanalyse

Einschränkungen des Adversary:
Um die Kompetitivität zu verbessern, schränken wir den Gegner in seinen Handlungsmöglichkeiten ein. Dazu setzen wir Schranken für die Anzahl der benötigten Blutkonserven. Es seien:

$$m := \text{die minimale Anzahl}$$

$$M := \text{die maximale Anzahl}$$

an benötigten Blutkonservern innerhalb einer Periode. Weiterhin sei

$$N := \text{die tatsächliche benötigte Anzahl}$$

an Erythrozytenkonzentraten mit $N \in [m, M]$.
Die Requests r_i können wir weiterhin zu Beginn der Periode mit einer Normalbestellung abarbeiten und zu einem späteren Zeitpunkt (zum Beispiel im Laufe eines Tages) nur per Express.

Im Folgenden betrachten wir zwei weitere Strategien und die allgemeine Variante für das eingeschränkte Blutkonserven-Bestellproblem.

3.2.1 Maximalbestellung

Eine Möglichkeit das Bestellverhalten zu variieren, ist es den möglichen Maximalbedarf an Blutkonserven zu ordern. Dazu betrachten wir den folgenden Algorithmus.

Strategie 1:
Der Online-Algorithmus ALG_M kauft zu Beginn die maximal benötigte Anzahl M an Blutkonserven und deckt somit alle ankommenden Anfragen ab. Deshalb kann eine Nachbestellung ausbleiben.

Satz 3.4. *Der Algorithmus ALG_M ist $\frac{M}{m}$-kompetitiv für das eingeschränkte Blutkonserven-Bestellproblem.*

Beweis. Es sei ALG_M der Online-Algorithmus, der zu Beginn einer Periode die maximale Anzahl M an Blutkonserven bestellt und es sei $\sigma = (r_i, \ldots, r_n)$ eine beliebige Anfragefolge. Der Algorithmus verursacht dann Kosten von $ALG_M(\sigma) = M \cdot 1 = M$. Der optimale Offline-Algorithmus würde genau die tatsächlich benötigte Menge ordern, also N Stück im Rahmen der Normalbestellung.
Der Adversary konstruiert die Eingabesequenz σ für den Algorithmus ALG_M so, dass tatsächlich nur m, also der Minimalbedarf an Blutkonserven benötigt wird. Somit erhalten wir:

$$\frac{ALG_M(\sigma)}{OPT(\sigma)} = \frac{M}{N} \overset{N \geq m}{\leq} \frac{M}{m} \qquad \forall \sigma$$

Im Worst Case verursacht der Algorithmus ALG_M demnach höchstens $\frac{M}{m}$-mal so hohe Kosten wie die optimale Lösung. □

3.2.2 Minimalbestellung

Neben der Maximalbestellung wollen wir auch die gegensätzliche Variante der Minimalbestellung untersuchen.

Strategie 2:
Nun betrachten wir den Online-Algorithmus ALG_m, der zu Beginn einer Periode lediglich die Mindestanzahl m an Blutkonserven bestellt und den Rest, nach Bedarf per Express, zu einem späteren Zeitpunkt.

Satz 3.5. *ALG_m ist $\beta - (\beta - 1)\frac{m}{M}$-kompetitiv für das eingeschränkte Blutkonserven-Bestellproblem.*

Beweis. Es sei $\sigma = (r_1, \ldots, r_n)$ eine beliebige Anfragefolge. Der Algorithmus ALG_m verursacht Kosten von $ALG_m(\sigma) = m + (N - m)\beta$, denn er kauft m Konserven zum Normalpreis und muss den noch zusätzlich bestehenden Bedarf per Express zu Kosten $(N - m)\beta$ nachbestellen. Die optimalen Offline-Kosten sind wieder N, also die wirklich benötigte Menge, dass heißt $OPT(\sigma) = N$.
Wir erhalten daher zunächst:

$$\begin{aligned}\frac{ALG_m(\sigma)}{OPT(\sigma)} &= \frac{m + (N-m)\beta}{N} = \frac{m + N\beta - m\beta}{N} \\ &= \frac{m(1-\beta)}{N} + \beta = \beta - (\beta - 1)\frac{m}{N}.\end{aligned}$$

Danach schätzen wir die Kompetitivität nach oben ab.

$$\frac{ALG_m(\sigma)}{OPT(\sigma)} = \beta - (\beta - 1)\frac{m}{N} \overset{N \leq M}{\leq} \beta - (\beta - 1)\frac{m}{M} \qquad \forall \sigma.$$

Aus dieser Ungleichung geht hervor, dass es für den Online-Algorithmus ALG_m, der zu Beginn nur den Minimalbedarf m bestellt, es am nachteiligsten ist, wenn der Fall eintritt, dass die Maximalmenge von M Blutkonserven benötigt wird.
Daraus folgt, dass gilt:

$$\frac{ALG_m(\sigma)}{OPT(\sigma)} = \beta - (\beta - 1)\frac{m}{N} \overset{N \leq M}{\leq} \beta - (\beta - 1)\frac{m}{M} \qquad \forall \sigma.$$

□

Nachdem wir die Strategie 2, analysiert haben, stellen wir fest, dass ALG_m eine bessere Kompetitivität aufweist als der Expressbestellungs-Algorithmus EX, der β-kompetitiv ist. Für die Kompetitivität c von ALG_m gilt nämlich:

$$c \leq \beta - (\beta - 1)\frac{m}{M} < \beta \qquad \text{für } m > 0.$$

Wäre $m = 0$, so würden wir wieder unsere Expressbestellungs-Strategie erhalten und somit eine Kompetitivität von β. Wir hätten also keine Verbesserung der Kompetitivität erreicht.

Mit ALG_m haben wir bereits eine bessere Bestellstrategie gefunden, als lediglich per Express zu bestellen. Um diese noch weiter zu verbessern, fehlt nun noch die allgemeine Fallbetrachtung.

3.2.3 Allgemeine Bestellstrategie

Nachdem wir uns die beiden Extreme der Minimal- und Maximalbestellung angeschaut haben, wenden wir uns den restlichen, allgemeinen Strategien zu.

Strategie 3:
Es sei ALG_{m+k} der deterministische Online-Algorithmus, welcher $m+k$ Blutkonserven, mit $k \in \{0, \ldots, M-m\}$, zu Beginn ordert und die zusätzlich benötigten zu Expresskosten nachbestellt.

Satz 3.6. *Der Online-Algorithmus ALG_{m+k} ist c-kompetitiv, mit*

$$c = \max\left\{\beta - (\beta - 1)\frac{m+k}{M} \;;\; \frac{m+k}{m}\right\}.$$

Beweis. Es sei $\sigma = (r_i, \ldots, r_n)$ eine beliebige Blutkonservenanfrage. Bei diesem Online-Algorithmus müssen wir zwei Fälle unterscheiden, nämlich:

I) $m + k \leq N$:
ALG_{m+k} hat Kosten von $ALG_{m+k}(\sigma) = m + k + (N - (m+k))\beta$, wenn er $m + k$ Konserven zum Normalpreis bestellt. Da $m + k \leq N$ ist, hat er anfangs zu wenig bestellt. Deshalb bestellt er den Restbedarf $N - (m + k)$ noch per Express, zu Kosten von β, nach.

II) $m + k \geq N$:
In diesem Fall hat ALG_{m+k} zu viel bestellt und es resultieren daraus Kosten von $ALG_{m+k}(\sigma) = m + k$.

Die optimalen Offline-Kosten belaufen sich in beiden Fällen auf $OPT_{m+k}(\sigma) = N$, der tatsächlichen Menge. Somit erhalten wir insgesamt:

I)

$$\begin{aligned}\frac{ALG_{m+k}(\sigma)}{OPT(\sigma)} &= \frac{m+k+(N-(m+k))\beta}{N} \\ &= \frac{(m+k)-(m+k)\beta}{N} + \beta\end{aligned}$$

$$= \frac{(m+k)(1-\beta)}{N} + \beta$$

$$= \beta - \frac{(\beta-1)(m+k)}{N} \qquad \text{für } m+k \leq N$$

II)

$$\frac{ALG_{m+k}(\sigma)}{OPT(\sigma)} = \frac{m+k}{N} \qquad \text{für } m+k \geq N$$

Im ersten Fall würde der Adversary dem Algorithmus eine Sequenz σ übergeben, so dass insgesamt M Erythrozytenkonzentraten benötigt werden.
Im Fall II würde eine Eingabesequenz σ, die nur m Konserven tatsächlich benötigt, den Quotienten am größten werden lassen, da so der Algorithmus zu viel bestellt hat, also zu hohe Kosten erzeugt.
Deshalb können wir die Kompetitivitäten wie folgt abschätzen:

I)

$$\begin{aligned} \frac{ALG_{m+k}(\sigma)}{OPT(\sigma)} &= \beta - \frac{(\beta-1)(m+k)}{N} \\ &\overset{N \leq M}{\leq} \beta - \frac{(\beta-1)(m+k)}{M} \qquad \forall \sigma \end{aligned}$$

II)

$$\begin{aligned} \frac{ALG_{m+k}(\sigma)}{OPT(\sigma)} &= \frac{m+k}{N} \\ &\overset{N \geq m}{\leq} \frac{m+k}{m} \qquad \forall \sigma \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\frac{ALG_{m+k}(\sigma)}{OPT(\sigma)} \leq \begin{cases} \beta - (\beta-1)\frac{m+k}{M}, & \text{wenn } m+k \leq N \\ \frac{m+k}{m}, & \text{wenn } m+k \geq N \end{cases}$$

Da wir immer den Worst Case betrachten ist ALG_{m+k} also
$\max\left\{\beta - (\beta-1)\frac{m+k}{M} \;;\; \frac{m+k}{m}\right\}$-kompetitiv. □

Definition 3.7. Für die nachfolgenden Untersuchungen definieren wir

$$\phi(k) := \max\left\{ \underbrace{\beta - (\beta - 1)\frac{m+k}{M}}_{(1)} \; ; \; \underbrace{\frac{m+k}{m}}_{(2)} \right\}$$

als die Kompetitivität von ALG_{m+k}.

Kompetitivitätsvergleich:
Wie bereits festgestellt, liefert ALG_m eine bessere Kompetitivität als die Expressbestellungs-Strategie. Nun können wir beobachten, dass ALG_{m+k} ebenfalls eine kleinere Kompetitivität als β hat.
Im Worst Case kann ALG_{m+k} nicht gleichzeitig schlechter als ALG_M und ALG_m sein, denn (1) wird maximal für $k = 0$, so dass (1) exakt der Schranke von ALG_m entspricht und (2) wird maximal für $k = M - m$, womit wir die Schranke von ALG_M erhalten.

Korollar 3.8. *Die allgemeine Strategie 3 ist nicht schlechter, also nicht teurer als Strategie 1 und 2, obwohl wir gegebenenfalls am Anfang eine größere Menge an Blutkonserven bestellen.*

3.3 Der optimale Online-Algorithmus

Um eine optimale Bestellstrategie, beziehungsweise den optimalen Online-Algorithmus, zu finden, schauen wir uns Strategie 3 noch einmal genauer an.
Bei Betrachtung von ALG_{m+k} stellt sich die Frage, wie ein optimales k aussehen muss, damit insgesamt so wenig Kosten wie möglich entstehen. Man sucht also ein k^*, das eine möglichst gute Kompetitivität liefert.

Satz 3.9. ***Die Optimale Bestellstrategie:***
Für den Online-Algorithmus ALG_{m+k^*} liefert

$$k^* = \operatorname*{arg\,min}_{k \in \{\lfloor k' \rfloor, \lceil k' \rceil\}} \{\phi(k)\} \qquad \in \mathbb{Z}$$

$$\text{mit } k' = \frac{M - m}{\frac{M}{m(\beta-1)} + 1} \qquad \in \mathbb{R}$$

die optimale Bestellstrategie für das eingeschränkte Blutkonserven-Bestellproblem.

Beweis. Es sei $k \in [0, M-m]$. Dann enthält ALG_{m+k} alle möglichen, insbesondere auch alle nicht ganzzahligen Strategien zu bestellen.
Um ein optimales k^* für den Algorithmus zu finden, suchen wir das k, das die Kompetitivität $\phi(k)$ von ALG_{m+k} minimiert. Das heißt, wir suchen zunächst die kontinuierliche Lösung:

$$\begin{aligned} k' &:= \underset{k\in[0,M-m]}{\arg\min} \{\phi(k)\} \\ &= \underset{k\in[0,M-m]}{\arg\min} \max\left\{ \underbrace{\beta-(\beta-1)\frac{m+k}{M}}_{f(k)} ; \underbrace{\frac{m+k}{m}}_{g(k)} \right\} \quad \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Da $\phi(k)$, wie in Abbildung 3.2 zu sehen, eine stückweise lineare Funktion in Abhängigkeit von k ist, bestimmen wir den Schnittpunkt von $f(k)$ mit $g(k)$, um das Minimum von $\phi(k)$ zu finden, denn $f(k)$ ist monoton fallend und $g(k)$ monoton steigend.

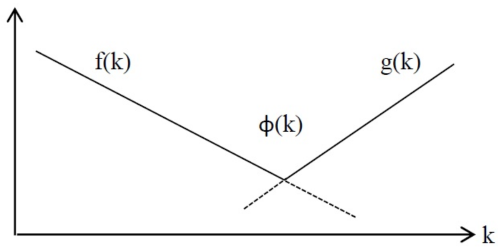

Abbildung 3.2: Skizze $\phi(k)$

Wir erhalten somit, wenn wir die Ganzzahligkeit außer Acht lassen:

$$\begin{aligned} f(k) = g(k) \iff \beta - \frac{(\beta-1)(m+k)}{M} &= \frac{m+k}{m} \\ \iff \beta &= \frac{m+k}{m} + \frac{(\beta-1)(m+k)}{M} \\ \iff \beta &= 1 + \frac{k}{m} + \frac{m\beta+k\beta-m-k}{M} \\ \iff \beta - 1 - \frac{m(\beta-1)}{M} &= \frac{k}{m} + \frac{k(\beta-1)}{M} \\ \iff \beta - 1 - \frac{m(\beta-1)}{M} &= \frac{Mk+mk(\beta-1)}{mM} \\ \iff Mm\left(\beta - 1 - \frac{m(\beta-1)}{M}\right) &= k(M+m(\beta-1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longleftrightarrow \frac{Mm(\beta-1)-m^2(\beta-1)}{M+m(\beta-1)} &= k \\
\Longleftrightarrow \frac{m(\beta-1)(M-m)}{M+m(\beta-1)} &= k \\
\Longleftrightarrow \frac{M-m}{\frac{M}{m(\beta-1)}+1} &= k \quad =: k' \quad \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Dieses k' ist die optimale Lösung des kontinuierlichen Problems, denn es ist genau der Schnittpunkt von $f(k)$ und $g(k)$.
Allerdings wollen wir für unser Bestellproblem eine ganzzahlige Lösung haben. Da $\phi(k)$ das Maximum von zwei linearen Funktionen ist, ist $\phi(k)$ konvex. Daher können wir die Lösung k', falls $k' \notin \mathbb{Z}$ ist, auf- beziehungsweise abrunden, so dass wir eine optimale Lösung $k^* \in \{\lfloor k' \rfloor, \lceil k' \rceil\} \subset \mathbb{Z}$ des diskreten Problems erhalten. Da $\phi(k')$ das Minimum der Kompetitivität bildet, ist somit $\phi(k^*)$ die optimale Kompetitivität.
Ein optimales k^*, das die Kompetitivität minimiert, können wir daher wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned}
k^* &= \operatorname*{arg\,min}_{k \in \{\lfloor k' \rfloor, \lceil k' \rceil\}} \{\phi(k)\} && \in \mathbb{Z} \\
\text{mit } k' &= \frac{M-m}{\frac{M}{m(\beta-1)}+1} && \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

□

Der optimale deterministische Online-Algorithmus:
In diesem Kapitel haben wir von der Betrachtung der Normalbestellungs- und Expressbestellungs-Strategie über die Strategien 1, 2 und 3 einen optimalen Online-Algorithmus gefunden, der die bestmögliche Kompetitivität für das eingeschränkte Blutkonserven-Bestellproblem liefert.

Da wir mit $k = [0, M-m]$ alle Algorithmen die in Frage kommen betrachtet haben, wissen wir, dass der Online-Algorithmus ALG_{m+k^*} tatsächlich eine optimale Lösung für unser Problem bestimmt.

Lemma 3.10. *Der deterministische Online-Algorithmus ALG_{m+k^*} kauft*

$$m + k^* = \begin{cases} m + \underset{k \in \{\lfloor k' \rfloor, \lceil k' \rceil\}}{\arg\min} \{\phi(k)\} \ , & \textit{falls } k' \notin \mathbb{Z} \\ m + k' = \frac{Mm\beta}{M+m(\beta-1)} \ , & \textit{falls } k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Blutkonserven zu Beginn einer Periode zum Normalpreis und den Restbedarf per Express, wenn nötig, und ist somit $\phi(k^*)$-kompetitiv, mit:

$$\phi(k^*) = \begin{cases} \frac{M\beta}{M+m(\beta-1)} + min\left\{\frac{\beta-1}{M} \ ; \ \frac{1}{m}\right\} \ , & \textit{falls } k' \notin \mathbb{Z} \\ \frac{M\beta}{M+m(\beta-1)} \ , & \textit{falls } k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Beweis. Wir berechnen, falls $k' \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} m + k' &= m + \frac{M-m}{\frac{M}{m(\beta-1)} + 1} && = \frac{\frac{M}{\beta-1} + m + M - m}{\frac{M}{m(\beta-1)} + 1} \\ &= \frac{\frac{M}{\beta-1} + M}{\frac{M}{m(\beta-1)} + 1} && = \frac{M + M(\beta-1)}{\beta-1} \cdot \frac{m(\beta-1)}{M + m(\beta-1)} \\ &= \frac{Mm\beta}{M + m(\beta-1)} \end{aligned}$$

Die Kompetitivität bestimmen wir wie folgt:
Der Algorithmus ALG_{m+k} ist $\phi(k)$-kompetitiv. Also ist der Algorithmus ALG_{m+k^*} $\phi(k^*)$-kompetitiv.
Daraus folgt, dass wir

$$\phi(k^*) = \begin{cases} \min\{\phi(\lfloor k' \rfloor) \ ; \ \phi(\lceil k' \rceil)\} \ , & \text{falls } k' \notin \mathbb{Z} \\ \phi(k') \ , & \text{falls } k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

betrachten müssen mit $k' = \frac{M-m}{\frac{M}{m(\beta-1)}+1}$.
Damit erhalten wir:

$$\phi(k^*) \ = \ \min\{\phi(\lfloor k' \rfloor) \ ; \ \phi(\lceil k' \rceil)\}$$

$$= \ \min\{ \ \max\{f(\lfloor k' \rfloor) \ ; \ g(\lfloor k' \rfloor)\} \ ; \ \max\{f(\lceil k' \rceil) \ ; \ g(\lceil k' \rceil)\} \ \}$$

$$= \min\{f(\lfloor k' \rfloor)\ ;\ g(\lceil k' \rceil)\} \qquad f \text{ fallend, } g \text{ steigend, } k' \text{ ist genau Schnittpunkt}$$

$$< \min\{f(k'-1)\ ;\ g(k'+1)\} \text{ mit } f(k'-1) = f(k') + \frac{\beta-1}{M},\ g(k'+1) = g(k') + \frac{1}{m}$$

$$= \min\left\{f(k') + \frac{\beta-1}{M}\ ;\ g(k') + \frac{1}{m}\right\} \qquad \text{es gilt } f(k') = g(k')$$

$$= g(k') + \min\left\{\frac{\beta-1}{M}; \frac{1}{m}\right\}$$

$$= \frac{m + \frac{M-m}{\frac{M}{m(\beta-1)}+1}}{m} + \min\left\{\frac{\beta-1}{M}; \frac{1}{m}\right\}$$

$$= \frac{M\beta}{M+m(\beta-1)} + \underbrace{\min\left\{\frac{\beta-1}{M}; \frac{1}{m}\right\}}_{\text{kommt hinzu wenn } k' \notin \mathbb{Z}} \qquad \text{wenn } k' \notin \mathbb{Z}$$

und

$$\phi(k^*) = \phi(k') = \max\left\{\underbrace{\beta - (\beta-1)\frac{m+k'}{M}}_{f(k')}\ ;\ \underbrace{\frac{m+k'}{m}}_{g(k')}\right\}$$

$$= \frac{m+k'}{m} \qquad \text{da } k' \text{ so gewählt, dass } f(k') = g(k')$$

$$= \frac{m + \frac{M-m}{\frac{M}{m(\beta-1)}+1}}{m} = 1 + \frac{(M-m)(\beta-1)}{M+m(\beta-1)}$$

$$= \frac{M\beta}{M+m(\beta-1)} \qquad \text{wenn } k' \in \mathbb{Z}$$

□

Beispiel:
Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir die Ergebnisse anhand eines Beispiels verdeutlichen.
Nehmen wir dazu an, es seien: $M = 100$ *und* $m = 10$. Ein Wert für β ergibt sich aus den realen Kosten für eine Blutkonserve. Eine Blutkonserve kostet durchschnittlich 87€. Eine Expressbestellung kostet 287€, zusammengesetzt aus den Expressversandkosten von 195€, zuzüglich der Kosten für eine Konserve mit einem Aufschlag von 5€. Daraus resultiert: $\beta = 3 + \frac{26}{87} = \frac{287}{87}$.

Um die optimale Bestellmenge und die optimale Kompetitivität zu bestimmen, berechnen wir zuerst k':

$$k' = \frac{M-m}{\frac{M}{m(\beta-1)}+1} = \frac{100-10}{\frac{100}{10(\frac{287}{87}-1)}+1} = \frac{1800}{107} \approx 16,8224 \quad \notin \mathbb{Z}$$

Da k' nicht direkt ganzzahlig ist berechnen wir k^* durch:

$$\begin{aligned} k^* &= \underset{k\in\{\lfloor k'\rfloor;\lceil k'\rceil\}}{\arg\min} \{\phi(k)\} \\ &= \underset{k\in\{16,17\}}{\arg\min} \{\phi(k)\} \end{aligned}$$

$$\phi(16) = \max\left\{\frac{287}{87} - \left(\frac{287}{87}-1\right)\frac{26}{100}\ ;\ \frac{26}{10}\right\} = \max\left\{\frac{235}{87}\ ;\ 2,6\right\} = \frac{235}{87}$$

$$\phi(17) = \max\left\{\frac{287}{87} - \left(\frac{287}{87}-1\right)\frac{27}{100}\ ;\ \frac{27}{10}\right\} = \max\left\{\frac{233}{87}\ ;\ 2,7\right\} = 2,7$$

$$\Longrightarrow k^* = \underset{k\in\{16,17\}}{\arg\min} \{\phi(k)\} = 17$$

Daraus folgt, dass die optimale Bestellmenge zu Beginn $m + k^* = 10 + 17 = 27$ beträgt.
Die Kompetitivität lautet:

$$\begin{aligned} c &= \frac{M\beta}{M+m(\beta-1)} + \min\left\{\frac{\beta-1}{M}\ ;\ \frac{1}{m}\right\} \\ &= \frac{100\cdot\frac{287}{87}}{100+10(\frac{287}{87}-1)} + \min\left\{\frac{\frac{287}{87}-1}{100}\ ;\ \frac{1}{10}\right\} \\ &= \frac{287}{107} + \min\left\{\frac{2}{87}\ ;\ \frac{1}{10}\right\} \approx 2,7052 \end{aligned}$$

Das heißt, dass der gefundene Online-Algorithmus $ALG_{m+k^*} = ALG_{27}$, der 27 Konserven per Normalbestellung anfordert und den Restbedarf per Express, höchstens $2,7052$-mal so teuer ist, wie die optimale Offline-Strategie. Dies ist eine deutliche Verbesserung zur Expressbestellungs-Stragie, die $\frac{287}{87} \approx 3,2989$-kompetitiv wäre.

Graphisch lässt es sich wie folgt darstellen:

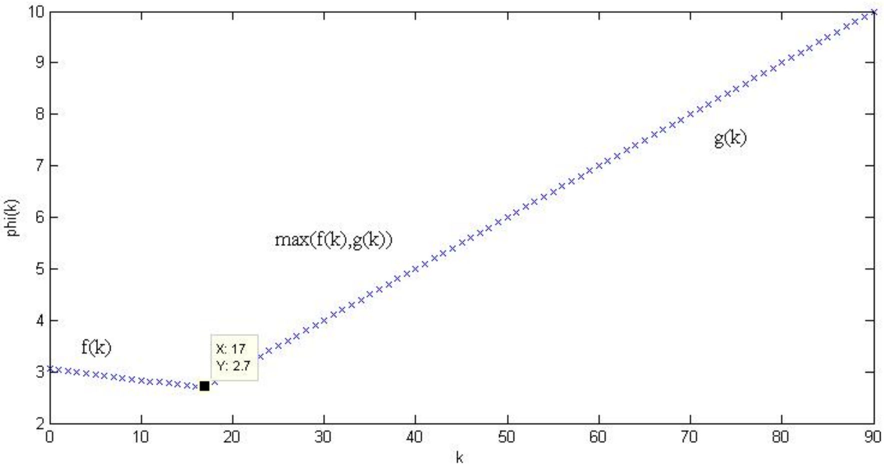

Abbildung 3.3: Kompetitivität von ALG_{m+k}

Zum Vergleich stehen in Tabelle 3.1 die anderen Algorithmen und deren Kompetitivitäten für dieses Beispiel:

Tabelle 3.1: Werte der deterministischen Algorithmen im Beispiel

Algorithmus	Kompetitivität
NB	–
EX	$\frac{287}{87} \approx 3,2989$
ALG_M	10
ALG_m	$\frac{89}{29} \approx 3,0689$
ALG_{m+k^*}	2,7052

3.4 Zusammenfassung

Mit Algorithmus ALG_{m+k^*} haben wir die bisher beste Kompetitivität gefunden und somit auch den optimalen deterministischen Online-Algorithmus für das eingeschränkte Blutkonserven-Bestellproblem. Dieser ist im Worst Case höchstens $\phi(k^*)$-mal so teuer wie der optimale Offline-Algorithmus.

Zusammenfassung der Algorithmen und deren Kompetitivitäten:

Tabelle 3.2: Übersicht der deterministische Algorithmen

Algorithmus	Kompetitivität
NB	–
EX	β
ALG_M	$\frac{M}{m}$
ALG_m	$\beta - (\beta - 1)\frac{m}{M}$
ALG_{m+k^*}	$\underbrace{\dfrac{M\beta}{M + m(\beta - 1)}}_{\text{wenn } k' \in \mathbb{Z}} + \underbrace{min\left\{\dfrac{\beta - 1}{M}; \dfrac{1}{m}\right\}}_{\text{kommt hinzu wenn } k' \notin \mathbb{Z}}$

4 Randomisierte Online-Algorithmen

Nachdem wir uns im vorherigen Kapitel mit deterministischen Online-Algorithmen beschäftigt haben und dabei eine für deterministische Algorithmen optimale Strategie fanden, wollen wir uns im Weitern den randomisierten Online-Algorithmen zuwenden.
Ziel dabei ist es, durch Randomisierung eine gegebenenfalls noch bessere Kompetitivität, beziehungsweise Strategie, für das Management von Blutdepots zu finden.

Bisher haben wir nur deterministische Online-Algorithmen verwendet, bei denen der Offline-Gegner vollständiges Wissen über den Algorithmus, das heißt über die benutzte Strategie und den tatsächlichen Ausgang der Entscheidung, hat.
Bei randomisierten Algorithmen ist dies nicht der Fall. Hier dürfen wir zu Beginn festlegen, wie viel Wissen der Offline-Gegner über den Online-Algorithmus hat. Dies bietet die Möglichkeit den Gegner zu verwirren, beziehungsweise es dem Adversary zu erschweren eine möglichst schlechte Anfragefolge σ für den Algorithmus zu konstruieren. Dies kann eine bessere Kompetitivität zur Folge haben [WP07, S.11].

Ein **randomisierter Online-Algorithmus** ist ein Algorithmus, der mit Zufallsentscheidungen auf Anfragen σ reagiert [KR03, S.10]. Ihm liegt eine gewisse Wahrscheinlichkeitsverteilung zu Grunde, mit der er eine Strategie aus einer Menge von verschiedenen deterministischen Algorithmen auswählen kann [BEY98, S.23].
Wir unterscheiden zwei grundlegend unterschiedliche Arten von Gegnern. Zum einen den blinden und zum anderen den adaptiven Gegner. Der adaptive Gegner kann jede Anfrage, mit Wissen über die bisherigen Zufallsentscheidungen des Algorithmus, beliebig anpassen [BEY98, S.45].
Für unser Anliegen wählen wir jedoch den **blinden Gegner** OBL **(oblivious Adversary)**. Dieser kennt die vom Algorithmus benutze Wahrscheinlichkeitsverteilung, allerdings hat er kein Wissen über den Ausgang der Zufallsentscheidungen. Daher muss der blinde Gegner die Anfragefolge σ im Voraus festlegen. Er kann sie also während der Bearbeitung durch den Algorithmus nicht mehr anpassen [FW98, S.20], [KR03, S.11].

An der Definition der Kompetitivität eines Online-Algorithmus ändert sich nicht viel. Wir müssen lediglich die erwarteten Kosten des randomisierten Algorithmus, also den

Erwartungswert über alle Zufallsentscheidungen, betrachten.

Definition 4.1. (Kompetitivität für Randomisierte Online-Algorithmen [BEY98, S.23f, 45f]) Ein randomisierter Online-Algorithmus ALG ist **c−kompetitiv** gegen einen Gegner vom Typ OBL, wenn es eine Konstante α gibt, so dass für alle endlichen Eingabefolgen σ gilt:

$$E(ALG(\sigma) - c \cdot OBL(\sigma)) \leq \alpha.$$

Da die Kosten von OBL nicht zufällig, sondern vorher schon festgelegt sind gilt:

$$E(ALG(\sigma)) \leq c \cdot OPT(\sigma) + \alpha.$$

Die Kompetitivität eines randomisierten Online-Algorithmus ist wie zuvor das Infimum über alle c, so dass der Algorithmus $c-$kompetitiv ist.

Randomisierte Algorithmen liefern nicht immer die gewünschte Lösung. Sie können sowohl „gute“ als auch „schlechte“ Lösungen berechnen. Allerdings können wir durch das Randomisieren eines Online-Algorithmus die Kompetitivität eines deterministischen Algorithmus schlagen.

4.1 Randomisierte Strategien

Im Folgenden werden wir uns zwei randomisierte Online-Algorithmen anschauen und diese daraufhin untersuchen, ob sie eine bessere Kompetitivität als der optimale deterministische Online-Algorithmus ALG_{m+k*} erreichen.
Es gelten weiterhin die getroffenen Annahmen aus Kapitel 3.

4.1.1 Würfeln zwischen Minimal- und Maximalbestellung

Algorithmus RAND1:
Wir betrachten den randomisierte Online-Algorithmus $RAND1$. Dieser wählt $i \in \{0, M - m\}$ zufällig, wenn er eine Anfragefolge σ erhält. Nachdem diese Zufallsentscheidung gefallen ist, wendet der Algorithmus $RAND1$ mit Wahrscheinlichkeit p_i den Algorithmus ALG_{m+i} auf σ an.
$RAND1$ kann also zwischen zwei verschiedenen deterministischen Online-Algorithmen würfeln. Hierbei benutzt er mit Wahrscheinlichkeit p_0 den Algorithmus ALG_m

und mit Wahrscheinlichkeit p_{M-m} den Algorithmus ALG_M. Das heißt, dass der randomisierte Algorithmus zu Beginn einer Periode (zum Beispiel zu Beginn eines Tages) entweder m oder M Blutkonserven bestellt und potentiell weitere Anfragen mit der Express-Variante bedient.

Tabelle 4.1: Übersicht $RAND1$

i	p_i	ALG_{m+i}
0	p_0	ALG_m
$M-m$	p_{M-m}	ALG_M

Damit eine Wahrscheinlichkeitsverteilung vorliegt muss zusätzlich gelten, dass:

$$p_0 + p_{M-m} = 1 \quad \text{und} \quad p_0, p_{M-m} \geq 0 \quad ist.$$

Demzufolge haben wir eine Wahrscheinlichkeitsverteilung p auf der Wahl der deterministischen Strategien, beziehungsweise der zu bestellenden Menge, zu Periodenbeginn.

Satz 4.2. *Der randomisierte Online-Algorithmus $RAND1$ ist*

$$\frac{M\beta}{M + m(\beta - 1)} - kompetitiv$$

gegen den blinden Gegner OBL mit

$$p_0 = \frac{M}{M + m(\beta - 1)} \text{ und } p_{M-m} = 1 - p_0$$

und ist somit nicht schlechter, als die Kompetitivität des optimalen deterministischen Online-Algorithmus ALG_{m+k^*}.

Beweis. Es sei σ eine beliebige Eingabesequenz, bei der N Erythrozytenkonzentrate tatsächlich benötigt werden. Dann belaufen sich die erwarteten Kosten des Online-Algorithmus $RAND1$ auf

$$E(RAND1(\sigma)) = p_0 \cdot (m + (N - m)\beta) \; + \; p_{M-m} \cdot M \; ,$$

denn fällt die Zufallsentscheidung $i = 0$, werden m Konserven mit Wahrscheinlichkeit p_0 zum Normalpreis bestellt und der Restbedarf $N - m$ zu Expresskosten β. Ist der

Ausgang der Zufallsentscheidung $i = M - m$, so kauft der Algorithmus mit Wahrscheinlichkeit p_{M-m} M Konserven und hat somit die tatsächlich benötigte Menge $N \in [m, M]$ abgedeckt.
Die optimalen Offline-Kosten betragen, wie üblich, $OBL(\sigma) = OPT(\sigma) = N$.

Der blinde Gegner OBL kennt die benutze Wahrscheinlichkeitsverteilung, das heißt die p_i's, von $RAND1$. Deshalb wählt er die Eingabesequenz σ, also die wirklich benötigte Menge N an Blutkonserven in Abhängigkeit von diesen. Hierbei kennt er den Ausgang der Zufallsentscheidung, also die gewählte Strategie, nicht.

Es gilt nun, die Parameter der Wahrscheinlichkeitsverteilung so zu wählen, dass die Kompetitivität minimal wird und der randomisierte Online-Algorithmus optimal zwischen ALG_m und ALG_M würfelt. Wir suchen also die Wahrscheinlichkeiten, die die Kompetitivität minimieren.

Demnach müssen wir folgendes Optimierungsproblem lösen:

$$\min_{p_0, p_{M-m} \geq 0 \;:\; p_0 + p_{M-m} = 1} \quad \max_{N \in \{m, \ldots, M\}} \frac{E(RAND1(\sigma))}{OPT(\sigma)}$$

Durch das Einsetzen der Kosten erhalten wir für die Kompetitivität c :

$$\begin{aligned}
\frac{E(RAND1(\sigma))}{OPT(\sigma)} &= \frac{p_0\ (m + (N - m)\beta)\ +\ p_{M-m}\ M}{N} \\
&= p_0\ (\beta - (\beta - 1)\frac{m}{N}) + (1 - p_0)\frac{M}{N} \qquad \text{da } p_{M-m} = 1 - p_0 \\
&= p_0\beta - p_0(\beta - 1)\frac{m}{N} - p_0\frac{M}{N} + \frac{M}{N} \\
&= p_0\beta + \frac{1}{N}(p_0\ ((1 - \beta)m - M) + M) \\
&=: \psi\ (p_0, N) \qquad \forall N \in \{m, \ldots, M\}
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass wir insgesamt

$$\begin{aligned}
&\min_{0 \leq p_0 \leq 1} \max_{N \in \{m, \ldots, M\}} \psi\ (p_0, N) \\
=&\min_{0 \leq p_0 \leq 1} \max_{N \in \{m, \ldots, M\}} p_0\beta + \frac{1}{N} \underbrace{(p_0\ ((1 - \beta)m - M) + M)}_{(3)}
\end{aligned}$$

bestimmen wollen.

Wenn (3) ein positives Vorzeichen hat, wird $\psi\ (p_0, N)$ durch eine vom Adversary übergebene Anfragefolge σ, dass nur m Konserven gebraucht werden, maximiert. Hat (3) wiederum ein negatives Vorzeichen, dann maximiert eine tatsächlich benötigte Menge von $N = M$ die Kompetitivität.
Daher müssen wir nur die beiden Extremfälle $N = m$ und $N = M$ betrachten.
Um zunächst die Wahrscheinlichkeitsverteilung p zu bestimmen, berechnen wir:

$$\begin{aligned}
&\underset{0 \le p_0 \le 1}{\arg\min} \max_{N \in \{m,M\}} \psi\ (p_0, N) \\
&= \underset{0 \le p_0 \le 1}{\arg\min} \ \max \{\psi\ (p_0, m)\ ;\ \psi\ (p_0, M)\} \\
&= \underset{0 \le p_0 \le 1}{\arg\min} \ \max \left\{ p_0\beta + p_0(1-\beta) - p_0\frac{M}{m} + \frac{M}{m}\ ;\ p_0\beta + p_0(1-\beta)\frac{m}{M} - p_0 + 1 \right\}
\end{aligned}$$

Da max $\psi\ (p_0, N)$ mit $N \in \{m, M\}$ eine stückweise lineare Funktion in Abhängigkeit von p_0 ist, erhalten wir p_0, indem wir den Schnittpunkt von $\psi\ (p_0, m)$ und $\psi\ (p_0, M)$ berechnen, denn diese Funktionen sind monoton fallend, beziehungsweise steigend.
Es gilt:

$$\begin{aligned}
\psi\ (p_0, m) &= \psi\ (p_0, M) \\
\Longleftrightarrow p_0\beta + p_0(1-\beta) - p_0\frac{M}{m} + \frac{M}{m} &= p_0\beta + p_0(1-\beta)\frac{m}{M} - p_0 + 1 \\
\Longleftrightarrow p_0 \left((1 - \beta - \frac{M}{m} - (1-\beta)\frac{m}{M} + 1 \right) &= 1 - \frac{M}{m} \\
\Longleftrightarrow p_0 &= \frac{\frac{m-M}{m}}{2 - \beta - \frac{M}{m} - \frac{m}{M} + \beta\frac{m}{M}} \\
\Longleftrightarrow p_0 &= \frac{M}{M + m(\beta - 1)}
\end{aligned}$$

und folglich ist $p_{M-m} = 1 - p_0$.

Setzen wir p_0 in $\psi\ (p_0, N)$ ein, erhalten wir damit:

$$\psi\ (p_0, N) = \frac{M\beta}{M + m(\beta - 1)} + \frac{1}{N}\left(\frac{M}{M + m(\beta - 1)}((1-\beta)m - M) + M\right)$$

$$= \frac{M\beta}{M+m(\beta-1)} + \frac{1}{N}\left(\frac{M(m-\beta m - M + M + \beta m - m)}{M+m(\beta-1)}\right)$$

$$= \frac{M\beta}{M+m(\beta-1)} \qquad \forall N$$

Da somit auch gilt, dass

$$\underset{0\leq p_0\leq 1}{min} \ \underset{N\in\{m,\ldots,M\}}{max} \ \psi\ (p_0, N) = \frac{M\beta}{M+m(\beta-1)} = p_0\beta\ ,$$

haben wir eine obere Schranke für die Kompetitivität von $RAND1$ gegen den blinden Gegner gefunden.

Es bleibt noch zu zeigen, dass diese Schranke für $RAND1$ besser ist, als die von ALG_{m+k^*}. Allerdings ist dies trivial, denn:

$$\frac{M\beta}{M+m(\beta-1)} \ + \ \min\left\{\frac{\beta-1}{M}\ ;\ \frac{1}{m}\right\} > \frac{M\beta}{M+m(\beta-1)} \qquad \text{für } k' \notin \mathbb{Z}$$

□

Beispiel:
Zum Abschluss wollen wir veranschaulichen, dass der randomisierte Online-Algorithmus $RAND1$ tatsächlich immer die Kompetitivität der deterministischen Algorithmen schlägt.

In der unten stehenden Tabelle sind einige Testinstanzen erfasst, die auf der Grundlage eines Linearen Programmes (LP1) mithilfe von Xpress [XP] und Matlab [ML] berechnet wurden. Das Lineare Programm (LP1) spiegelt das obige „MinMax-Problem“ wieder und lässt sich wie folgt formulieren:

$$\begin{array}{llll} (LP1) & \underset{p_0}{min} & c & \\ & s.d. & c \ \geq \ \psi\ (p_0, N) & \forall N \in \{m,\ldots,M\} \\ & & 0 \ \leq \ p_0 \ \leq \ 1 & \end{array}$$

Führen wir einige Testdurchläufe mit vorgegebenen Werten für $m,\ M\ und\ \beta$ durch und vergleichen die Kompetitivitäten mit dem optimalen deterministischen Online-Algorithmus ALG_{m+k^*}, dann erhalten wir:

Tabelle 4.2: Beispielhafter Vergleich ALG_{m+k^*} und $RAND1$

m	M	β	ALG_{m+k^*}	$RAND1$	p_0
10	100	$\frac{287}{87}$	$2,7052$	$2,68224$	$0,813084$
10	78	$\frac{287}{87}$	$2,5774$	$2,54792$	$0,772365$
10	50	$\frac{287}{87}$	$2,3058$	$2,25984$	$0,685059$
10	23	$\frac{287}{87}$	$1,7498$	$1,64984$	$0,500125$
10	20	$\frac{287}{87}$	$1,6348$	$1,53476$	$0,465241$
1	100	$\frac{287}{87}$	$3,2477$	$3,22472$	$0,977528$
1	50	$\frac{287}{87}$	$3,1998$	$3,15385$	$0,956044$

Bei genauerer Betrachtung der ersten Zeile, stellen wir fest, dass wie schon im Abschlussbeispiel des Kapitel 3 berechnet, der Algorithmus ALG_{m+k^*} für $m = 10,\ M = 100$ und $\beta = \frac{287}{87}$ eine Kompetitivität von $2,7052$ hat und er somit 27 Blutkonserven zum gegebenen Normalpreis am Anfang der Periode bestellt.
Der randomisierte Algorithmus $RAND1$ hingegen ist $2,688224$-kompetitiv und somit günstiger als ALG_{m+k^*}. Die kleinere Competitiv Ratio wird erreicht, indem optimal zwischen den Algorithmen ALG_m und ALG_M gewürfelt wird. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $81,3084$ % bestellt der Algorithmus $RAND1$ nur 10 Erythrozytenkonzentrate und lediglich in $18,6916$ % der Fälle bestellt er sofort 100 Stück zum Periodenbeginn.

Ausblick:
In Kapitel 4.1.2 und 4.2 werden wir sehen, dass $RAND1$ bereits der optimale randomisierte Online-Algorithmus ist.

4.1.1.1 Zusammenfassung

Mit dem randomisierte Online-Algorithmus $RAND1$, der auf Grundlage einer Wahrscheinlichkeitsverteilung zwischen zwei deterministischen Algorithmen würfelt, nämlich der Minimal- und Maximalbestellungs-Strategie, haben wir es geschafft, eine Bestellstrategie zu finden, die nicht schlechter ist als die bisherigen deterministischen Algorithmen.

4.1.2 Würfeln zwischen allen deterministischen Strategien

Zur vollständigen Darstellung wollen wir, nachdem wir den Algorithmus $RAND1$ untersucht haben, auch noch den allgemeinen Fall betrachten. Theoretisch können wir auch eine Verteilung über alle deterministischen Algorithmen legen. Somit erhalten wir den randomisierten Online-Algorithmus $RAND2$. Auch hier können wir eine bestmögliche Variante auswählen, die nicht schlechter als $RAND1$ ist. Allerdings wird die Kompetitivitätsanalyse schnell sehr komplex.
Da wir in Kapitel 4.2 zeigen werden, dass $RAND1$ bereits optimal ist und deshalb die Analyse von $RAND2$ gar nicht notwendig ist, wollen wir $RAND2$ an dieser Stelle nur kurz skizzieren.

Algorithmus RAND2:
Der randomisierte Algorithmus $RAND2$ arbeitet im Wesentlichen auf die selbe Art und Weise, wie der Algorithmus $RAND1$. Der Unterschied besteht lediglich darin, dass dieser Algorithmus zwischen allen deterministischen Bestellstrategien würfeln kann. So reagiert er mit einer Zufallsentscheidung $i \in \{0, \ldots, M - m\}$ auf eingehende Requests σ. Mit Wahrscheinlichkeit p_i bearbeitet er die Anfrage dann mit dem deterministischen Algorithmus ALG_{m+i}.

Tabelle 4.3: Übersicht $RAND2$

i	p_i	ALG_{m+i}
0	p_0	ALG_m
1	p_1	ALG_{m+1}
2	p_2	ALG_{m+2}
...	...	...
...	...	...
$M - m$	p_{M-m}	ALG_M

Des Weiteren muss gelten:

$$\sum_{i=0}^{M-m} p_i = 1 \quad \text{und} \quad p_i \geq 0$$

damit eine Wahrscheinlichkeitsverteilung p vorliegt.

Die zu erwarteten Kosten des randomisierten Algorithmus sind:

$$
\begin{aligned}
&E(RAND2(\sigma))\\
&\left.\begin{aligned}
&= p_0\ (m + (N-m)\beta) + p_1\ (m+1+(N-m-1)\beta)\\
&+ \ldots + p_k\ (m+k+(N-m-k)\beta)
\end{aligned}\right\}\text{wenn } m+i < N,\ i \in \{0,\ldots,k\}\\
&\left.\begin{aligned}
&+\ p_{k+1}\ (m+k+1) + p_{k+2}\ (m+k+2)\\
&+ \ldots + p_{M-m}\ M
\end{aligned}\right\}\text{wenn } m+i \geq N,\ i \in \{k+1,\ldots,M-m\}
\end{aligned}
$$

Dann ist:

$$
\begin{aligned}
\frac{E(RAND2(\sigma))}{OPT(\sigma)} &= \frac{1}{N}\left(\sum_{i=0}^{M-m} p_i\ (m+i) + \sum_{i=0}^{N-m-1} p_i\ (N-m-i)\beta\right)\\
&=: \psi\ (p,N)
\end{aligned}
$$

Wir wollen dementsprechend wieder die Lösung des Optimierungsproblems

$$
\min_{p_i \geq 0\ :\ \sum_{i=0}^{M-m} p_i\ =1}\ \ \max_{N\in\{m,\ldots,M\}}\ \ \psi\ (p,N)
$$

bestimmen. Da dies analytisch nur noch schwer zu lösen ist und wie schon angedeutet eigentlich nicht nötig ist, schreiben wir es direkt in LP-Form um und lösen es numerisch, um einige Beispielwerte zu erhalten.

$$
\begin{array}{llll}
(LP2) & \min\limits_{p_i} & z & \\
& s.d. & z\ \geq\ \psi\ (p,N) & \forall N \in \{m,\ldots,M\}\\
& & 0\ \leq\ p_i\ \leq\ 1 & \forall i \in \{0,\ldots,M-m\}
\end{array}
$$

Das numerische Lösen von LP2 mittels Xpress [XP] liefert, wie in Tabelle 4.4 zu sehen, dass $RAND2$ für vorgegebene $m,\ M,\ und\ \beta$ exakt die selben Kompetitivitäten aufweist, wie der Algorithmus $RAND1$.

Tabelle 4.4: Beispielhafter Vergleich $RAND1$ und $RAND2$

m	M	β	$RAND1$	$RAND2$
10	100	$\frac{287}{87}$	$2,7052$	$2,7052$
10	78	$\frac{287}{87}$	$2,5774$	$2,5774$
10	50	$\frac{287}{87}$	$2,3058$	$2,3058$
10	23	$\frac{287}{87}$	$1,7498$	$1,7498$
10	20	$\frac{287}{87}$	$1,6348$	$1,6348$
1	100	$\frac{287}{87}$	$3,2477$	$3,2477$
1	50	$\frac{287}{87}$	$3,1998$	$3,1998$

4.1.2.1 Zusammenfassung

Obwohl $RAND2$ im Gegensatz zu $RAND1$, der lediglich die Auswahl zwischen der Minimalbestellungs- und Maximalbestellungs-Strategie hat, zwischen allen deterministischen Online-Algorithmen würfeln kann, bietet er im Erwartungswert keine „bessere“ Lösung für unser Online-Problem, als $RAND1$.

4.2 Yao's Prinzip - Der optimale randomisierte Online-Algorithmus

Yao's Prinzip ist eine Technik, die verwendet wird um untere Schranken für die Kompetitivität von randomisierten Online-Algorithmen gegen den blinden Gegner zu finden.

Anders als bei der Untersuchung von randomisierten Algorithmen auf obere Schranken für die Kompetitivität, haben wir keine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der Wahl der deterministischen Strategie, das bedeutet auf der Entscheidung des Algorithmus. Stattdessen definieren wir eine geeignete Wahrscheinlichkeitsverteilung q auf der Menge der Eingabesequenzen σ, also auf der tatsächlich benötigten Menge N [BEY98, S.115ff].

Mit Yao's Prinzip wollen wir an dieser Stelle belegen, dass es in unserem Fall genügt, den Algorithmus $RAND1$ zu betrachten und den Algorithmus $RAND2$ außer Acht zu lassen.

Für diese Untersuchung benötigen wir Yao's Prinzip für Online-Probleme, welches besagt:

Satz 4.3. ***(Yao's Prinzip für Online-Probleme*** *[KR03, S.40]****)*** *Sei q eine Verteilung auf den Eingabesequenzen $\{\sigma_i\}$ eines Online-Problems, so dass für alle deterministischen Online-Algorithmen ALG gilt:*

$$\frac{E_q(ALG(\sigma_i))}{E_q(OPT(\sigma_i))} \geq c \ .$$

Dann ist c eine untere Schranke für die Kompetitivität des besten randomisierten Algorithmus gegen den blinden Gegner OBL.

Anschaulich bedeutet dies, dass es ausreicht, jeden deterministischen Online-Algorithmus im Durchschnitt schlecht aussehen zu lassen, um eine untere Schranke für die Kompetitivität des besten randomisierten Algorithmus gegen den blinden Gegner zu finden. Dieses Vorgehen ist in der Regel leichter, als einen randomisierten Algorithmus zu überlisten. Wir suchen also eine Eingabesequenz $\{\sigma_i\}$, sodass alle deterministischen Algorithmen durchschnittlich schlecht aussehen, anstatt nach einer Sequenz σ zu suchen, die schlecht für einen randomisierten Algorithmus ist [BEY98, S.115].

Algorithmus ALG_q :

Es sei ALG_q der deterministischer Online-Algorithmus, der bei eingehenden Anfragefolgen σ immer $m + k$, $k \in \{0, \ldots, M - m\}$, Blutkonserven zum Normalpreis bestellt und gegebenenfalls per Express nachordert.

Auf die Requests $\{\sigma_i\}$, welche den Strategien des Gegners entsprechen, definieren wir die Wahrscheinlichkeitsverteilung q, was bedeutet, dass mit Wahrscheinlichkeit q_i tatsächlich $m + i$, $i \in \{0, M - m\}$, Konserven gebraucht werden. Die Anzahl der wirklichen Bedarfsmenge N ist also zufällig gewählt.

Tabelle 4.5: Übersicht ALG_q

i	q_i	σ_i
0	q_0	m
$M - m$	q_{M-m}	M

Außerdem müssen wir erneut festlegen, dass $q_0 + q_{M-m} = 1 \quad \text{und} \quad q_0, q_{M-m} \geq 0$.

Die erwarteten Kosten des deterministischen Algorithmus ALG_q bezüglich der Verteilung q auf σ sind:

$$E_q(ALG_q(\sigma)) = q_0 \ (m+k) + q_{M-m} \ (m+k+(M-m-k)\beta)$$

Sie kommen dadurch zustande, dass mit Wahrscheinlichkeit q_0 m Blutkonserven angefragt werden, die von Algorithmus ALG_q bereits abgedeckt werden, da dieser immer zu Periodenbeginn schon $m+k$, $k \in \{0, \ldots, M-m\}$ Konserven kauft. Des Weiteren können mit Wahrscheinlichkeit q_{M-m} insgesamt M Konserven benötigt werden. Diese Anfrage wird vom Algorithmus nicht unbedingt abgedeckt. Gegebenenfalls muss der Restbedarf $M - (m+k)$ nachbestellt werden. In diesem Fall, zu Expresskosten von β.
Die optimalen erwarteten Offline-Kosten bei Bearbeitung von σ betragen

$$E_q(OPT(\sigma)) = q_0 m + q_{M-m} M \ .$$

Diese resultieren aus der optimalen Bestellweise des blinden Gegners. Er bestellt die entsprechend angefragte Menge $\sigma \in \{m, M\}$ immer zu Kosten von 1.

Satz 4.4. $\frac{M\beta}{M+m(\beta-1)}$ *ist eine untere Schranke für die Kompetitivität des besten randomisierten Online-Algorithmus gegen den blinden Gegner. Da* $RAND1$ *diese Schranke genau trifft, ist* $RAND1$ *der optimale randomisierte Online-Algorithmus für das Management von Blutdepots gegen den Gegner vom Typ OBL.*
Insbesondere folgt daraus, dass es genügt nur $RAND1$ *zu betrachten.*

Beweis. Yao's Prinzip besteht darin eine untere Schranke zu bestimmen, daher wollen wir ein maximales c berechnen, so dass,

$$\frac{E_q(ALG_q(\sigma_i))}{E_q(OPT(\sigma_i))} \geq c \qquad \forall i, k$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\max_{q_0, q_{M-m} \geq 0 \,:\, q_0 + q_{M-m} = 1} \ \min_{k \in \{0, \ldots, M-m\}} \frac{E_q(ALG_q(\sigma_i))}{E_q(OPT(\sigma_i))}$$

Somit sind alle deterministischen Strategien enthalten.
Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{E_q(ALG_q(\sigma_i))}{E_q(OPT(\sigma_i))} &= \frac{q_0\ (m+k)+(1-q_0)(m+k+(M-m-k)\beta)}{q_0 m+(1-q_0)M} \\
&= \frac{(1-q_0)(M-m-k)\beta+m+k}{q_0\ (m-M)+M} \\
&= \beta+\frac{m(1-\beta)}{q_0\ (m-M)+M}+k\cdot\underbrace{\frac{1-\beta(1-q_0)}{q_0\ (m-M)+M}}_{(4)} \\
&:= \gamma\ (q_0,k) \qquad \forall k
\end{aligned}$$

Analog zum randomisierten Algorithmus $RAND1$ reicht es in diesem Fall ebenfalls aus, die Extremfälle $k=0$ und $k=M-m$ zu betrachten, da diese, je nach Vorzeichen von (4) die Kompetitivität, wie gefordert, minimieren.
Anschaulich bedeutet dies, dass wenn die Zufallsentscheidung mit $i=0$ ausgeht, m Blutkonserven tatsächlich gebraucht werden. Wählt der Algorithmus ALG_q in dieser Situation $k=0$ und benutzt somit den Algorithmus ALG_m, dann minimiert die dementsprechend zu Periodenbeginn gekaufte Menge von m die Competitiv Ratio.
Ebenso minimiert die Wahl der Maximalbestellungs-Strategie ALG_M, also $k=M-m$, die Kompetitivität, falls zufällig die Maximalmenge M benötigt wird.
Es gilt damit:

$$\max_{0\le q_0\le 1}\ \min_{k\in\{0,M-m\}}\ \gamma\ (q_0,k)$$

$$=\max_{0\le q_0\le 1}\quad \min\left\{\beta+\frac{m(1-\beta)}{q_0\ (m-M)+M}\ ;\ \beta+\frac{m(1-\beta)+(M-m)(1-\beta(1-q_0))}{q_0\ (m-M)+M}\right\}$$

$$=\max_{0\le q_0\le 1}\quad \min\left\{\ \beta+\frac{m(1-\beta)}{q_0\ (m-M)+M}\ ;\ \frac{M}{q_0\ (m-M)+M}\right\}$$

Darüber hinaus können wir, wie in den vorherigen Beweisen, q_0 durch die Bestimmung des Schnittpunktes von $\gamma\ (q_0,0)$ und $\gamma\ (q_0,M-m)$ berechnen.

$$\begin{aligned}
\beta+\frac{m(1-\beta)}{q_0\ (m-M)+M} &= \frac{M}{q_0\ (m-M)+M} \\
\Longleftrightarrow \beta q_0\ (m-M)+\beta M+m(1-\beta) &= M
\end{aligned}$$

$$\iff q_0 = \frac{M - m(1-\beta) - M\beta}{\beta(m-M)}$$

$$\iff q_0 = 1 - \frac{1}{\beta}$$

Daraus resultiert eine untere Schranke für die Kompetitivität von

$$\begin{aligned}\gamma\,(1-\frac{1}{\beta},k) &= \beta + \frac{m(1-\beta)}{(1-\frac{1}{\beta})(m-M)+M} + k\cdot 0\\ &= \beta + \frac{m - m\beta}{m - \frac{m}{\beta} + \frac{M}{\beta}}\\ &= \frac{\beta m - m + M + m - m\beta}{\frac{M}{\beta} + m(1-\frac{1}{\beta})}\\ &= \frac{M\beta}{M + m(\beta-1)} \qquad \forall k.\end{aligned}$$

Setzten wir nun $c = \frac{M\beta}{M+m(\beta-1)}$, dann ist c nach Yao's Prinzip die untere Schranke des besten randomisierten Online-Algorithmus. Da c in diesem Fall exakt der Kompetitivität von $RAND1$ entspricht, ist der Algorithmus $RAND1$ der optimale randomisierte Online-Algorithmus gegen den blinden Gegner.
Insbesondere können wir daraus schließen, dass wir tatsächlich den allgemeinen Algorithmus $RAND2$ nicht mehr genauer betrachten müssen. □

4.2.1 Zusammenfassung

In Kapitel 4 haben wir mit dem randomisierten Algorithmus $RAND1$ den bisher besten Algorithmus für das Blutkonserven-Bestellproblem gefunden.
Es reicht demnach aus, zwischen der Minimal- und Maximalbestellungs-Strategie wählen zu können, um es dem Gegner zu erschweren die Competitive Ratio, zu seinen Gunsten und zu Ungunsten des Online-Spielers, zu maximieren.

Zusammenstellung der Algorithmen:
In der untenstehenden Tabelle befinden sich alle untersuchten Algorithmen mit deren Kompetitivitäten für die beispielhaften Werte von $M = 100,\ m = 10$ und $\beta = \frac{287}{87}$.

Tabelle 4.6: Zusammenstellung der bisherigen Algorithmen

Algorithmus	Kompetitivität	Beispielwert
NB	–	–
EX	β	$\frac{287}{87} \approx 3,2989$
ALG_M	$\frac{M}{m}$	10
ALG_m	$\beta - (\beta - 1)\frac{m}{M}$	$\frac{89}{29} \approx 3,0689$
ALG_{m+k^*}	$\underbrace{\frac{M\beta}{M + m(\beta - 1)}}_{\text{wenn } k' \in \mathbb{Z}} + \underbrace{min\left\{\frac{\beta - 1}{M}; \frac{1}{m}\right\}}_{\text{kommt hinzu wenn } k' \notin \mathbb{Z}}$	2,7052
$RAND1$	$\frac{M\beta}{M+m(\beta-1)}$	2,6822

5 Das Haltbarkeitsproblem

Zum Abschluss dieser Arbeit ist es noch erforderlich, dass wir uns mit der Thematik der beschränkten Haltbarkeit der Erythrozytenkonzentrate auseinandersetzen.

Wie vorab in der Einleitung erläutert, sind die Erythrozytenkonzentrate nach deren Eintreffen beim Endverbraucher nur noch eine gewisse Zeit lang haltbar. Dies erschwert die optimale Planung der Bestellmengen und stellt neben des ethischen Konfliktes, ein solch wertvolles Gut verfallen zu lassen, einen zusätzlichen, gegebenenfalls vermeidbaren, Kostenfaktor dar. Daher besteht unser Ziel darin, die Verfallsrate zu minimieren, jedoch auch die Kosten so gering wie möglich zu halten.

Abweichend von den vorherigen Kapiteln müssen wir zunächst die getroffenen Annahmen etwas anpassen.

Annahmen:
Wir nehmen an, dass die Erythrozytenkonzentrate nicht mehr unendlich lange haltbar sind, sondern dass sie alle die gleiche beschränkte Haltbarkeitszeit von h Tagen besitzen.
An jedem Tag $j \in \{1, \ldots, h\}$ einer Periode werden weiterhin mindestens m und maximal M Blutkonserven benötigt. N_j sei wie zuvor die tatsächliche Bedarfsmenge an Erythrozytenkonzentraten am entsprechenden Tag $j \in \{1, \ldots, h\}$. Dabei können die N_j's durchaus verschiedene Werte annehmen.

Graphisch lässt sich dies wir folgt darstellen:

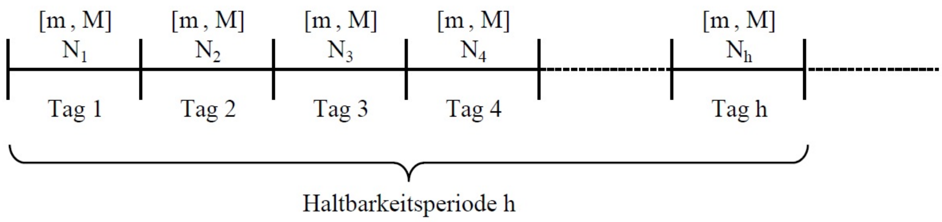

Abbildung 5.1: Darstellung einer Haltbarkeitsperiode mit Bedarf

Die gesamte benötigte Menge an Erythrozytenkonzentraten während einer Haltbarkeitsperiode ist $\sum_{j=1}^{h} N_j$. Dann existiert ein $N \in [m, M]$, sodass wir diese Gesamtmenge mit

$$hN = \sum_{j=1}^{h} N_j$$

bezeichnen können.
Daraus geht hervor, dass es für den Adversary nicht von Vorteil sein wird die tatsächlich benötigte Anzahl an Erythrozytenkonzentraten für jeden Tag j unterschiedlich zu gestalten.

Unverändert bleiben die beiden Bestellvarianten Normal- und Expressbestellung.
Da wir im folgenden eine Haltbarkeitsperiode h betrachten wollen, ist eine Normalbestellung nur zu Beginn dieser möglich. Währenddessen sind Nachbestellungen nur zu Expresskosten von β erlaubt.
Theoretisch könnten wir unser Modell auch so konstruieren, dass wir an jedem Tag j der Haltbarkeitsperiode zu Tagesbeginn eine Normalbestellung tätigen dürfen. Die an diesem Tag nicht benötigten Blutkonserven könnten wir dann am Tag $j + 1$ nutzen. Jedoch betrachten wir diese Variante nicht, da die Untersuchung der Kompetitivität durch die Restwertbetrachtung des Vortages zu aufwendig wird und den Rahmen dieser Arbeit überschreiten würde. Außerdem würde sie keine Verbesserung zu dem im Folgenden betrachteten Modell mit sich bringen.

Durch das Beschränken der Haltbarkeitszeit erschweren wir es dem Online-Algorithmus eine optimale, die Competitiv Ratio minimierende Bestellstrategie, zu finden. Allerdings erhöht sich die Kompetitivität der deterministischen Online-Algorithmen durch diese Einschränkung nicht, wie wir nachstehend feststellen werden.

Zur Betrachtung der Haltbarkeit definieren wir folgenden deterministischen Online-Algorithmus:

Algorithmus $ALG^{h}{}_{m+k}$:
Der Online-Algorithmus $ALG^{h}{}_{m+k}$ bestellt zu Beginn einer Haltbarkeitsperiode h stets $h(m+k)$, mit $k \in [0, M-m]$, Erythrozytenkonzentrate zum normalen Preis und gegebenenfalls zusätzlich benötigte werden später zu Kosten von β gekauft. Hierbei muss k nicht mehr zwingend ganzzahlig sein, sondern es muss $h(m + k) \in \mathbb{Z}$ gelten.

Jeden Tag werden mindestens m und maximal M Konserven benötigt, dass heißt innerhalb einer Haltbarkeitsperiode werden zwischen hm und hM Blutkonserven erforderlich. Aufgrund dessen und der Tatsache, dass die Blutkonserven h Tage lang haltbar sind, ist es sinnvoll am Anfang des Haltbarkeitsabschnitt für jeden der h Tage $m + k$ Erythrozytenkonzentrate zu bestellen. Somit versuchen wir den tatsächlichen Bedarf bestmöglich abzudecken, ohne das am Ende des Betrachtungszeitraumes Konserven übrig bleiben, denn deren Haltbarkeit verfällt zu diesem Zeitpunkt.

Satz 5.1. *Für jeden deterministischen c-kompetitiven Online-Algorithmus ALG^h_{m+k}, mit $k \in [0, M - m]$, gilt*

$$c \;\geq\; \phi^\infty(k) \qquad \forall k \;,$$

wobei $\phi^\infty(k)$ der Kompetitivität des schon bekannten Algorithmus ALG_{m+k} für das Bestellproblem mit unendlicher Haltbarkeit entspricht. Diesen bezeichnen wir hier als ALG^∞_{m+k}.
$\phi^\infty(k)$ ist also eine untere Schranke für die Kompetitivität von ALG^h_{m+k}.

Beweis. Es sei σ eine Eingabeinstanz. Außerdem seien die beiden deterministischen Online-Algorithmen ALG^∞_{m+k} und ALG^h_{m+k} gegeben, die auf unendlicher beziehungsweise beschränkter Haltbarkeit der Blutkonserven basieren.
Dann gilt:

$$OPT^\infty(\sigma) \;=\; OPT^h(\sigma) \;,$$

da jeder optimale Algorithmus stets nur die passende angefragte Menge an Blutkonserven bestellt. Des Weiteren sind die normalen Bestellkosten von Erythrozytenkonzentraten, die unendlich lange haltbar sind, gleich den Kosten der Konserven, die nach einer gewissen Haltbarkeitszeit ablaufen. Bei unendlicher Haltbarkeit der Konserven kann allerdings gegebenenfalls auf das Nachbestellen per Express verzichtet werden. Daher gilt für jedes $k \in [0, M - m]$:

$$ALG^\infty_{m+k}(\sigma) \;\leq\; ALG^h_{m+k}(\sigma)$$

Mit der obigen Gleichung zusammen können wir nun folgern, dass die Kompetitivität von Algorithmus ALG^h_{m+k} nicht besser sein kann als die von ALG^∞_{m+k}, denn

$$\frac{ALG^\infty_{m+k}(\sigma)}{OPT^\infty(\sigma)} \quad\leq\quad \frac{ALG^h_{m+k}(\sigma)}{OPT^h(\sigma)}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \phi^{\infty}(k) \quad \leq \quad \phi^{h}(k) \qquad \forall \sigma \ .$$

$\phi^h(k)$ ist die Kompetitivität für das Haltbarkeitsproblem und $\phi^\infty(k)$ ist die Kompetitivität, die wir in Kapitel 3.2.3 bereits für den Algorithmus ALG^∞_{m+k} gefunden haben. $\phi^\infty(k)$ ist demnach eine untere Schranke für die Kompetitivität $\phi^h(k)$ des deterministischen Online-Algorithmus ALG^h_{m+k}. □

Satz 5.2. *ALG^h_{m+k} ist $\phi^h(k) = \phi^\infty(k)$-kompetitiv und erreicht somit immer die Kompetitivität des entsprechenden Online-Algorithmus ALG^∞_{m+k}. Folglich liefert das Einschränken der Haltbarkeit von Erythrozytenkonzentraten keine schlechtere Kompetitivität, als wenn wir eine unbeschränkte Haltbarkeitsdauer voraussetzen.*

Beweis. Die Kompetitivitätsanalyse des Algorithmus ALG^h_{m+k} gestaltet sich nahezu analog zur Analyse in Kapitel 3.2.3.
Da der Algorithmus zu Beginn der Haltbarkeitsperiode für jeden Tag $j \in \{1, \ldots, h\}$ $m+k$ Blutkonserven per Normalbestellung kauft und zusätzlichen Bedarf per Express, betragen die Online-Kosten

$$\frac{ALG_{m+k}(\sigma)}{OPT(\sigma)} = \begin{cases} h\ (m+k) + (hN - h\ (m+k))\beta, & \text{falls } h\ (m+k) \leq hN \\ h\ (m+k), & \text{falls } h\ (m+k) \geq hN \ . \end{cases}$$

Die optimalen Offline-Kosten in einer Haltbarkeitsperiode belaufen sich auf

$$OPT^h(\sigma) = hN \ ,$$

da der Offline-Algorithmus wie üblich exakt die tatsächlich benötigte Menge zu Kosten von 1 kauft. Für den Adversary besteht also kein Vorteil darin, die tatsächlich benötigte Anzahl an Erythrozytenkonzentraten für jeden Tag j der Haltbarkeitsperiode h, unterschiedlich zu gestalten.

Bestimmen wir die Competitive Ratio, so stellen wir fest, dass die Haltbarkeitsbeschränkung keine Auswirkung auf die Kompetitivität hat, denn

$$\frac{ALG^h_{m+k}(\sigma)}{OPT^h(\sigma)} = \begin{cases} \frac{h\ (m+k)+(hN-h\ (m+k))\beta}{hN}\ , & \text{falls } h\ (m+k) \leq hN \\ \frac{h\ (m+k)}{hN}\ , & \text{falls } h\ (m+k) \geq hN \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{m+k+(N-(m+k))\beta}{N}\ , & \text{falls } h\ (m+k) \leq hN \\ \frac{m+k}{N}\ , & \text{falls } h\ (m+k) \geq hN \end{cases}$$

$$\leq \begin{cases} \beta - (\beta-1)\frac{m+k}{M} \quad , & \text{falls } h\ (m+k) \leq hN \\ \frac{m+k}{m} \quad , & \text{falls } h\ (m+k) \geq hN \end{cases}$$

entspricht genau der Kompetitivität des schon bekannten Algorithmus ALG^{∞}_{m+k}. Daraus resultierend, erhalten wir dieselbe obere Schranke von:

$$\phi^h(k) = \max\left\{\beta - (\beta-1)\frac{m+k}{M}\ ;\ \frac{m+k}{m}\right\} \qquad \forall\sigma$$

und ebenfalls analog zu den Ausführungen in Kapitel 3.3 können wir ein optimales k^*, beziehungsweise einen optimalen Algorithmus $ALG^h_{m+k^*}$ finden, mit einer Kompetitivität von

$$\phi^h(k^*) = \frac{M\beta}{M+m(\beta-1)} + \min\left\{\frac{\beta-1}{M}; \frac{1}{m}\right\} ,$$

$$\text{wobei} \quad k^* = \underset{k\in\{\lfloor k'\rfloor,\lceil k'\rceil\}}{\arg\min} \ \{\phi(k)\} \quad \text{und} \quad k' = \frac{M-m}{\frac{M}{m(\beta-1)}+1} \quad \text{ist.}$$

Aufgrund dessen, dass der Online-Algorithmus zu Beginn, aber im Prinzip für jeden Tag die gleiche Menge bestellt, kann der Adversary die Haltbarkeitsproblematik nicht zu seinen Gunsten ausnutzen. Er ist sozusagen dazu gezwungen an jedem Abschnitt dieselbe Anfrage σ zu stellen. □

Die Betrachtung von deterministischen Online-Algorithmen mit beschränkter Haltbarkeit stellt also keinen Unterschied zu denen dar, die auf Grundlage von unendlicher Haltbarkeit der Erythrozytenkonzentrate arbeiten. $ALG^h_{m+k^*}$ ist schließlich in der Worst Case Betrachtung nicht schlechter als $ALG^{\infty}_{m+k^*}$.

Korollar 5.3. *Aus Satz 5.1 und 5.2 folgt, dass $\phi^{\infty}(k) \ \leq \ \phi^h(k) \ \leq \ \phi^{\infty}(k)$ gilt. Da ein identisches optimales k^* für beide Algorithmen existiert, wird auch die Gleichung*

$$\phi^{\infty}(k^*) \ \leq \ \phi^h(k^*) \ \leq \ \phi^{\infty}(k^*)$$

erfüllt. Darum trifft ALG^h_{m+k} genau die Kompetitivität von ALG^{∞}_{m+k} und es gilt somit:

$$\phi^h(k^*) \ = \ \frac{ALG^h_{m+k^*}(\sigma)}{OPT^h(\sigma)} \ = \ \phi^{\infty}(k^*)$$

5.1 Zusammenfassung

Das Beschränken der Haltbarkeitsdauer der Erythrozytenkonzentrate erschwert die Bedingungen für den Algorithmus, jedoch hat dies keinerlei Einfluss auf die kompetitive Analyse. Die Kompetitivität wird dadurch weder verschlechtert, noch verbessert. Es macht also keinen Unterschied, ob wir bei der Untersuchung von Online-Algorithmen die Haltbarkeit völlig außer Acht lassen, oder ob wir sie einschränken.

6 Zusammenfassung

Zum Abschluss dieser Arbeit wollen wir noch einmal unsere Ergebnisse zusammenfassen.

Für das Management von Blutdepots haben wir in Kapitel 3, unter der Voraussetzung der unendlichen Haltbarkeit der Blutkonserven, die deterministischen Online-Algorithmen der Normalbestellung (NB), Expressbestellung (EX), Maximalbestellung (ALG_M), Minimalbestellung (ALG_m) und den allgemeinen Fall Algorithmus (ALG_{m+k}) untersucht. Dabei haben wir den optimalen deterministischen Online-Algorithmus ALG_{m+k^*} gefunden, der mit

$$k^* = \underset{k \in \{\lfloor k' \rfloor, \lceil k' \rceil\}}{\arg\min} \{\phi(k)\} \qquad \in \mathbb{Z}$$

$$\text{und } k' = \frac{M - m}{\frac{M}{m(\beta-1)} + 1} \qquad \in \mathbb{R}$$

eine Kompetitivität von

$$\phi(k^*) \;=\; \underbrace{\frac{M\beta}{M + m(\beta - 1)}}_{\text{wenn } k' \in \mathbb{Z}} + \underbrace{min\left\{\frac{\beta - 1}{M}; \frac{1}{m}\right\}}_{\text{kommt hinzu wenn } k' \notin \mathbb{Z}}$$

liefert. Dieser Algorithmus bestellt zu Periodenbeginn stets

$$m + k^* = \begin{cases} m + \underset{k \in \{\lfloor k' \rfloor, \lceil k' \rceil\}}{\arg\min} \{\phi(k)\}\ , & \text{falls } k' \notin \mathbb{Z} \\ m + k' = \frac{Mm\beta}{M + m(\beta-1)}\ , & \text{falls } k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Blutkonserven.

Darauffolgend haben wir im Kapitel 4 randomisierte Online-Algorithmen betrachtet. Hier sind wir zu dem Ergebnis gekommen, dass der Algorithmus $RAND1$ der optimale randomisierte Online-Algorithmus ist und zudem der beste Online-Algorithmus für das Management von Blutdepots. Das zufällige wählen zwischen der Minimalbestellungs- und der Maximalbestellungs-Strategie liefert die beste erreichte Kompetitivität von

$$\psi\ (p_0, N) = \frac{M\beta}{M + m(\beta - 1)}\ .$$

Der Algorithmus $RAND1$ bestellt dabei zu Beginn der Periode mit Wahrscheinlichkeit $p_0 = \frac{M}{M+m(\beta-1)}$ den Minimalbedarf m an Erythrozytenkonzentraten und mit Wahrscheinlichkeit $p_{M-m} = 1 - p_0$ den Maximalbedraf M.

In Kapitel 5 haben wir abschließend unseren Blick auf die Haltbarkeitsproblematik gewendet. Hierbei sind wir zu der Erkenntnis gekommen, dass das Einschränken der Haltbarkeitszeit der Erythrozytenkonzentraten keine Auswirkungen auf die kompetitive Analyse hat.
Somit ist der Algorithmus $RAND1$ der beste von uns gefundene Online-Algorithmus für das Management von Blutdepots.

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Literatur

[BEY98] BORODIN, A.; EL-YANIV, R. (1998): *Online Computation and Competitive Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge [u.a], 414 S.

[CLR96] CORMEN, T.-H.; LEISERSON, C.-E.; RIVEST, R.-L. (1996): *Introduction to Algorithms.* MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1028 S.

[FW98] FIAT, A.; WOEGINGER, G.-J. (1998): *Online Algorithms -The State of the Art-.* Springer, Berlin [u.a], 436 S.

[GT97] GOETHE, J.-W. (1997): *Faust eine Tragödie: Erster und zweiter Teil.* dtv Deutscher Taschenbuch Verlag, München, 416 S.

[KR03] KRUMKE, S.-O.; RAMBAU, J. (2003): *Online Optimierung.* Berlin, 152 S.

[WP07] WESTPHAL, S. (2007): *Aspects of Online Routing and Scheduling.* Kaiserslautern, 145 S.

[BZD08] BZD Gesellschaft für Transfusionsmedizin Duisburg mbH (2008): *Verarbeitung und Verteilung -Lagerung-.* Duisburg. `http://www.blutspendezentren.de/index.php?idcatside=232`, letzter Zugriff 17.05.2013

[DÄB10] Deutsches Ärzteblatt (2010): *Engpässe bei Blutspenden durch demografischen Wandel befürchtet.* Verlag Deutsches Ärzteblatt, Köln. `http://www.aerzteblatt.de/nachrichten/41537/Engpaesse-bei-Blutspenden-durch-demografischen-Wandel-befuerchtet`, letzter Zugriff 17.05.2013

[DRK12] Deutsches Rotes Kreuz; DRK-Blutspendedienst West (2012): *Akuter Blutkonserven-Mangel - Rotes Kreuz ruft dringend zur Blutspende auf.* `http://www.blutspendedienst-west.de/presseinformationen/presse_detail.php?news_id=362`, letzter Zugriff 17.05.2013

[DCF] DocCheck Flexikon: *Blut.* `http://flexikon.doccheck.com/de/Blut`, letzter Zugriff 17.05.2013

[PEI13] HENSELER, O. (2013): *Berichte nach § 21 Transfusionsgesetz -Tabellen: Gewinnung, Herstellung, Import, Export und Verbrauch 2011 und Auswertung über mehrere Jahre-.* Hrsg. Paul-Ehrlich-Institut. Langen. `http://www.pei.de/DE/infos/meldepflichtige/meldung-blutprodukte-21-transfusionsgesetz/berichte/berichte-21tfg-node.html`, letzter Zugriff 17.05.2013

[MDI] MEDIZINFO: *Bluttransfusion: Erythrozytenkonzentrate.* Flensburg. http://www.medizinfo.de/haematologie/bluttransfusion/erythrozytenkonzentrate.shtml, letzter Zugriff 17.05.2013

Mündliche Mitteilungen:

[MQ12] KURSCH, B.; HITSCHKE, R. (2012/2013): Dr.Burkhard Kursch und die Medizinisch-Technische-Assistentin (MTA) Ruth Hitschke, Mitarbeiter des Hans-Susemihl-Krankenhauses in Emden.

Weiterführende Literatur:

[KEM] Klinikum Emden, Hans-Susemihl-Krankenhaus. Emden. http://www.klinikum-emden.de/, letzter Zugriff 17.05.2013

Verwendete Software:

[XP] FICO Xpress Optimization Suite 7.3.0, Student License

[ML] MATLAB, Version 7.10.0.499 (R2010a)

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Göttingen, 27. Mai 2013