



GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT
GÖTTINGEN

Zum Begriff der Information in Mathematik und Informatik

Robert Schaback

Georg-August-Universität Göttingen



Information in der Mathematik

Information $\text{Info}(e)$ eines Ereignisses e

Forderungen:

- $\text{Info}(\text{immer eintretendes Ereignis}) = 0$
- $\text{Info}(\text{nicht eintretendes Ereignis}) = \infty$
- $\text{Info}(A \text{ und } B) = \text{Info}(A) + \text{Info}(B)$

Definition:

$$\text{Info}(e) := -\log p(e)$$

Information = Unsicherheit



Information in der Mathematik

Information $\text{Info}(e) := -\log_2 p(e)$ eines Ereignisses e

Beispiele:

Münzwurf: $\text{Info}(\text{Kopf}) = -\log_2 p(\text{Kopf}) = -\log_2 (\frac{1}{2}) = 1$ (ein Bit)

Würfeln: $\text{Info}(\text{Sechs}) = -\log_2 (1/6) = \log_2 6 = 2.585$

Gleichwahrscheinliche N Ereignisse: $\text{Info}(\text{Einzelereignis}) = \log_2 N$

Information in der Mathematik

Informationsgehalt einer **Menge E** alternativer Ereignisse e_i , mit Wahrsch. $p(e_i)$

$$H(E) := - \sum_i p(e_i) * \log p(e_i)$$

Erwartungswert der Information unter Einbeziehung aller Möglichkeiten

Auf Anraten von John von Neumann nennt Shannon diese Funktion **Entropie**

Beispiel: Speisekarte mit $8=2^3$ Speisen

Entropie = 3, falls alle Speisen gleich wahrscheinlich gewählt werden

Datenübertragung mit 3 Bits an Küche möglich



Information in der Mathematik

Anwendung in der Codierung

- Häufige Zeichen *kurz* codieren, seltene *lang* codieren
- $L(e_i)$ = Länge des Codes für Ereignis e_i
- Erwartungswert für mittlere Codelänge pro Zeichen:

$$L := \sum_i p(e_i) * L(e_i)$$

$$H(E) := - \sum_i p(e_i) * \log_2 p(e_i)$$

Entropie:

Entropie-Codierung: $L(e_i) \approx c (-\log_2 p(e_i))$ ist optimal

Anwendung in der Nachrichtenübertragung

Informationsverlust bei Zeichenübertragung auf gestörtem Kanal



Information in der Mathematik

Eigenschaften der mathematischen Informationsdefinition:

- es geht nur um formale Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten
- spezielle Ereignisse werden verstanden als Auftreten von Zeichen
- Kommunikation als Übertragung von Zeichenfolgen
- es gibt keine „Bedeutung“ von Ereignissen oder Zeichenfolgen



Information in der Mathematik

Bisher:

Information als **Gegenstand** in der Mathematik

Jetzt:

Information als **Methode** in der Mathematik

Definitionen, Sätze, Beweise als Sprachsätze, die **Information** enthalten

Übergang zur **Informatik**



Information in der Informatik

Information ist das Ergebnis der **Interpretation** einer **Nachricht**

$$\begin{array}{ccc} \text{Nachricht} & \Rightarrow & \text{Information} \\ \text{Interpretation} & & \end{array}$$

Nachrichten haben **Träger** und **Form**

Der **Träger** besteht aus einem **Signal** auf einem **Medium**

Die **Form** der Nachricht ist eine **Raumzeitstruktur** des **Signals**

Beispiele:

- Texte
- Musik
- Bilder



Information in der Informatik

Information ist das Ergebnis der **Interpretation** einer **Nachricht**

$$\begin{array}{ccc} \text{Interpretation} & & \\ \text{Nachricht} & \Rightarrow & \text{Information} \end{array}$$

Information setzt **Interpretation** voraus

Information hängt vom **Interpretationsprozeß** und dem **Interpretierenden** ab

Beispiel: Koalitionsvertrag, Zeitungsberichte

Interpretation kann auf **Form-** und **Inhaltsebene** geschehen

Deshalb gibt es **Information** über **Form** und **Inhalt** einer Nachricht

Beispiel: Musik



GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT
GÖTTINGEN

Eine Nachricht

道 可 道 道 名 名
道 常 可 常
非 名 非



Information in der Mathematik

Informationsgehalt einer Zeichenfolge

Jedes Zeichen wird als Ereignis e_i
mit einer Wahrscheinlichkeit $p(e_i)$ angesehen

Lange Zeichenkette mit N Zeichen hat das Zeichen e_i etwa $N p(e_i)$ mal

$$\begin{aligned} p(\text{Kette}_N) &\approx p(e_1)^{Np(e_1)} * p(e_2)^{Np(e_2)} * \dots * p(e_M)^{Np(e_M)} \\ -\log_2 p(\text{Kette}_N) &\approx -\log_2(p(e_1)^{Np(e_1)} * p(e_2)^{Np(e_2)} * \dots * p(e_M)^{Np(e_M)}) \\ \text{Information } (\text{Kette}_N) &\approx N * H(E) \end{aligned}$$

$$H(E) := - \sum_i p(e_i) * \log_2 p(e_i) \approx \text{Information } (\text{Kette}_N) / N$$



Tao Te King (Lao Tse)

Könnten wir weisen den Weg,
Es wäre kein ewiger Weg.
Könnten wir nennen den Namen,
Es wäre kein ewiger Name.

道 可 道
非 常 可
名 常 名
非 常 名



Zusammenfassung

Mathematik:

$$\text{Info}(e) := -\log_2 p(e)$$

Information wird über **Wahrscheinlichkeit** von **Ereignissen** definiert

Modell: Zufallsauswahl von Ereignissen aus einer Ereignismenge

Informatik:

Information ist das Ergebnis der **Interpretation** einer Nachricht

Interpretation

Nachricht \Rightarrow *Information*

Modell: Interpretationsprozeß als „Abtastvorgang“, Ergebnis = **Information**

Information auf vielen Ebenen: u.a. **formal** und **inhaltlich**