

Impedanztomographie mit realen Daten

Zusammenarbeit mit
der Projektgruppe für zerstörungsfreie
Baumdiagnose der Fachhochschule
Hildesheim/Holzminden/Göttingen.

Ziel des Projekts:

Das lokalisieren von Faulstellen
und/oder anderen Schäden an Bäumen
um den marktwirtschaftlichen Wert,
sowie seiner Gefahr gegenüber seiner
Umgebung zu bestimmen und somit zu
entscheiden ob er gefällt werden muss.

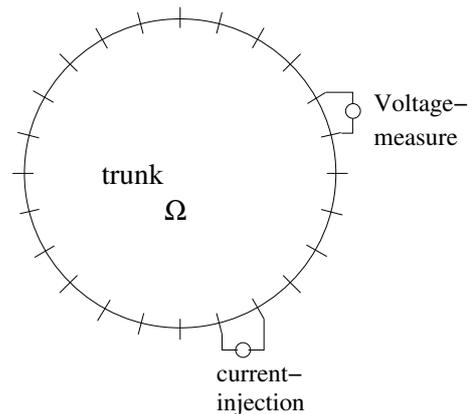


Figure 1: Konfiguration

Problem: Betrachte Rekonstruktionen der Leitfähigkeiten in dem
Gebiet auf der Basis von gemessenen Impedanzen am äusseren
Rand.

Messapparatur und Test-Situation

Ein Ring mit 24 Elektroden, welche die Rinde leicht durchstossen damit eine gute Ankopplung erzielt und die isolierende Rinde vermieden wird.



Figure 2: Messapparat mit Test-Situation

Mathematisches Modell

Wir betrachten die Zeit-Unabhängigen Maxwell-Gleichungen und benutzen weiterhin, dass der Strom Divergenz-frei ist und ein Potential u existiert.

Weitere Annahmen:

- Punktförmige Einspeisungen und Abgriffe des Stroms und der Spannung.
- Kein Stromfluss auf dem Rand.

Mit diesen Annahmen gelangen wir zu einem eindeutigen Neumann Randwert-Problem in der folgenden Form:

(Direktes Problem)

Bestimme das Potential u in Ω mit

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = I\delta(\cdot - x_s) - I\delta(\cdot - x_q),$$

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0,$$

$$\int_{\Omega} u \, dx = 0.$$

(Inverses Problem)

mit gegebenen $u|_{\partial\Omega}$, I , x_s und x_q bestimme σ .

dabei ist x_s die Position der Senke des Stroms und x_q die Position der Quelle des Stroms.

FEM-Vorwärtslöser

Der Rand $\partial\Omega$ sei stückweise C^2 . Wechsel zur schwachen Formulierung des Problems: Sei $u \in H^1(\Omega)$ und $v \in H^1(\Omega)$. Dann wird das Problem in der schwachen Formulierung zu:

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \sigma \nabla u \, dx = Iv(x_s) - Iv(x_q)$$

Wegen H^1 müssen wir die δ -Funktion approximieren:

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \sigma \nabla u \, dx = \int_{\Omega} I(x)v \, dx \quad (1)$$

Numerische Implementation in 2D:

Mit der Wahl von Dreiecken als Finite Elemente und einer Basis von stückweise linearen Funktionen ($\psi_k : k = 1, \dots, N$), kann u und v dargestellt werden als:

$$u = \sum_{k=1}^N \alpha_k \psi_k \quad v = \sum_{j=1}^N \beta_j \psi_j$$

wobei N die Anzahl der Elemente ist. Mit dieser Darstellung und $\beta_j = \delta_{ij}$ wird Gl. (1) zu:

$$\sum_{k=1}^N \int_{\Omega} \alpha_k \nabla \psi_i(x) \cdot (\sigma \nabla \psi_k(x)) \, dx = \int_{\Omega} I(x) \cdot \psi_i(x) \, dx$$

Dies kann geschrieben werden als:

$$\sum_{k=1}^N (\alpha_k)_k \cdot (S(\psi_i, \psi_k))_{i,k} = \int_{\Omega} I(x) \cdot \psi_i(x) \, dx \quad (i = 1, \dots, N)$$

wobei

$$(S(\psi_i, \psi_k))_{i,k} = \int_{\Omega} \nabla \psi_i(x) \cdot (\sigma \nabla \psi_k(x)) \, dx$$

die sogenannte *Steifigkeitsmatrix* ist.

Beispiel für den Vorwärtslöser

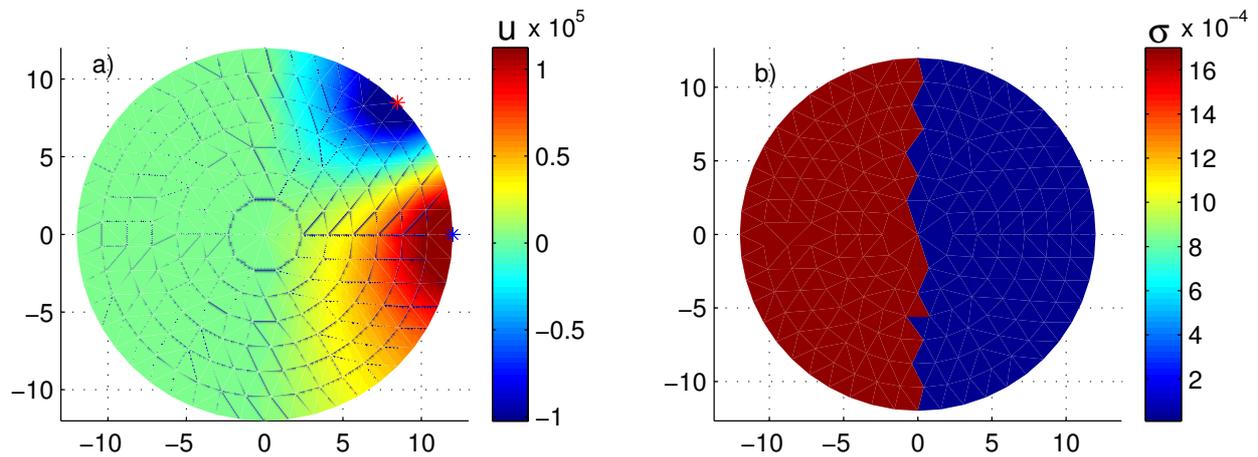


Figure 3: a) Potential, interpolierte Darstellung; b) Verteilung der Leitfähigkeit

Rekonstruktion-Methoden angewandt auf reale Daten mit grossen Datenfehler

Problem:

- physikalisch korrekte Algorithmen zeigen schlechte Ergebnisse mit unseren realen Daten.
- Heuristische Algorithmen zeigen vernünftige (aber keine guten) Ergebnisse mit unseren realen Daten.

Wir haben 2 bekannte heuristische und 1 bekannten physikalisch korrekten Rekonstruktions-Algorithmus mit Daten von unserem Dummy getestet.

Nur die heuristischen Ansätze zeigten vernünftige Ergebnisse mit unseren realen Daten mit einem Datenfehler von etwa 10 %.

Unser Ziel: Einen physikalisch korrekten Algorithmus zu finden, der vernünftige, oder sogar gute, Ergebnisse mit unseren Daten zeigt.

Einfache Schichten-Rückprojektion

Wir haben 2 Rückprojektions-Algorithmen benutzt, welche im Prinzip auf der Linearität zwischen Impedanz und Spannung (wie das Ohm'sche Gesetz) mit einem Geometrie-abhängigen Faktor k basieren.

$$\frac{1}{\sigma} = \rho = k \frac{U}{I}$$

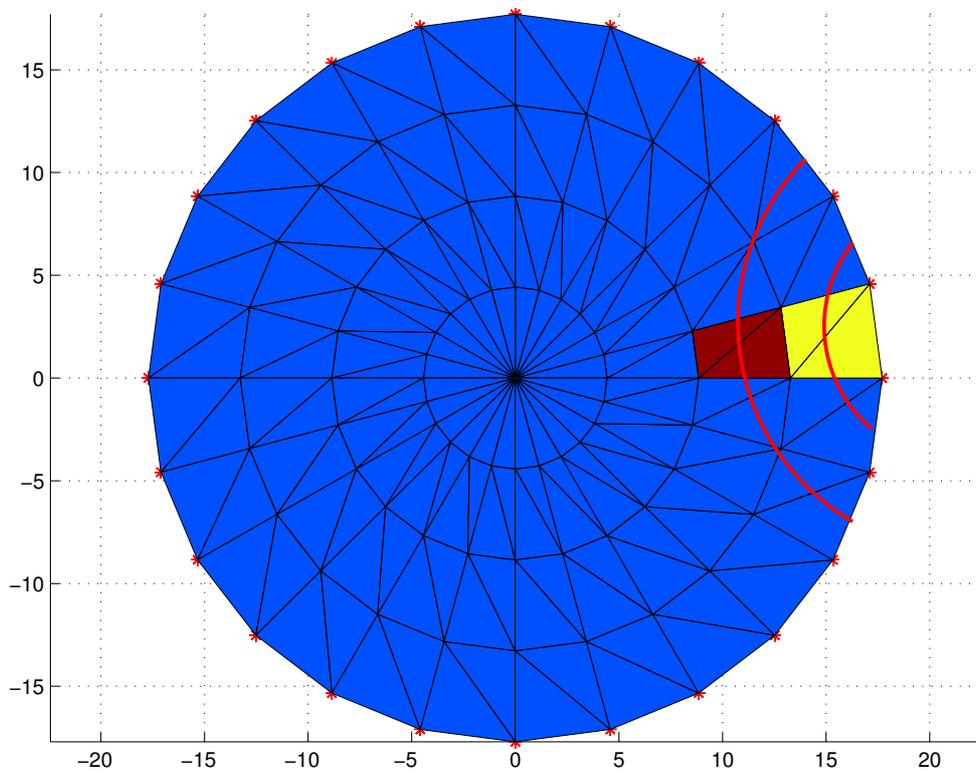


Figure 4: benutztes Gitter und Visualisierung der Idee

Tomographische Rückprojektion

- Annahme von geraden Linien zwischen 2 Paaren von Elektroden.
- Jedes Dreieck stellt einen Widerstand dar, durch Reihenschaltung entsteht ein lösbares Gleichungssystem:

N = Anzahl der Dreiecke, ρ bekannt, σ_j unbekannt ($j = 1, \dots, N$)

Beispiel mit 4 Rechtecken:

$$\rho_{12} = \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2}$$
$$\rho_{13} = \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_3}$$
$$\vdots$$

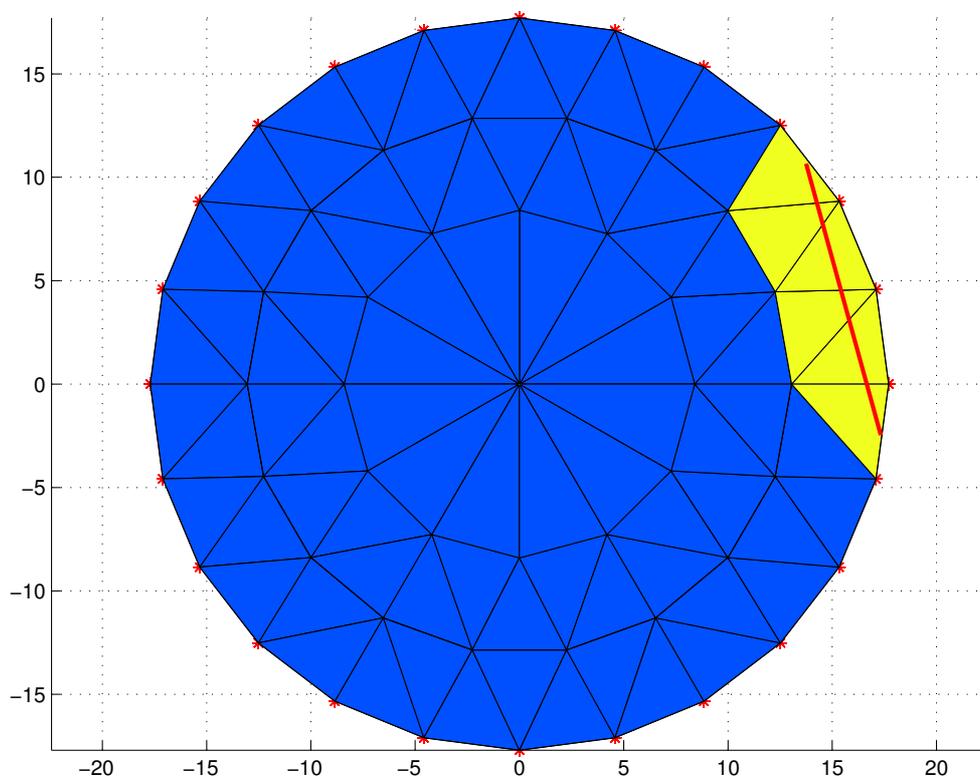


Figure 5: benutztes Gitter und Visualisierung der Idee

Methode vom sukzessiven lokalem Least-Square

Grosser Datenfehler von etwa 10 % \Rightarrow Ein Algorithmus wird gebraucht, der stark regularisiert ist aber dennoch gute Ergebnisse liefert.

1. Ein Schritt beinhaltet das anpassen von σ in einem Element, wobei alle anderen konstant sind. Anpassung nur über 3 Werte.
2. Wiederhole (1) mit neuem σ bis alle Elemente erreicht worden sind.
3. Wiederhole (1) und (2) bis Ergebniss zufriedenstellend ist oder ein Abbruchkriterium erreicht ist.

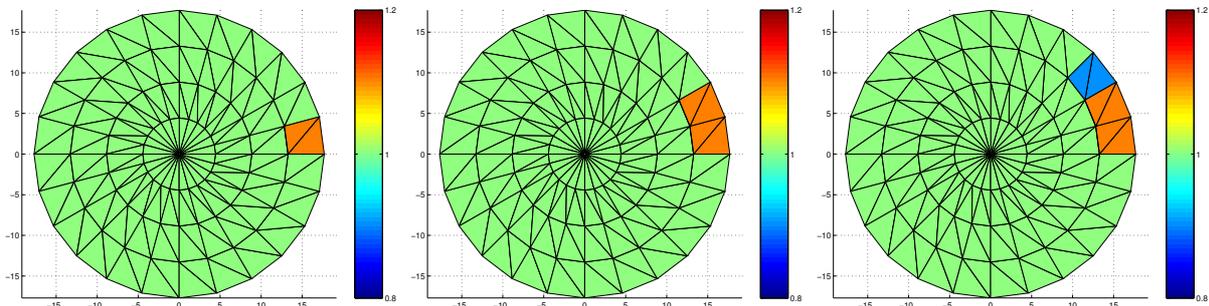


Figure 6: Beispiel für die ersten 3 Schritte

Die Regularisierung geschieht durch sukzessive Projektion auf niedrig-dimensionale Unterräume und der starken Diskretisierung der Least-Square Anpassung.

Reale Test-Situation

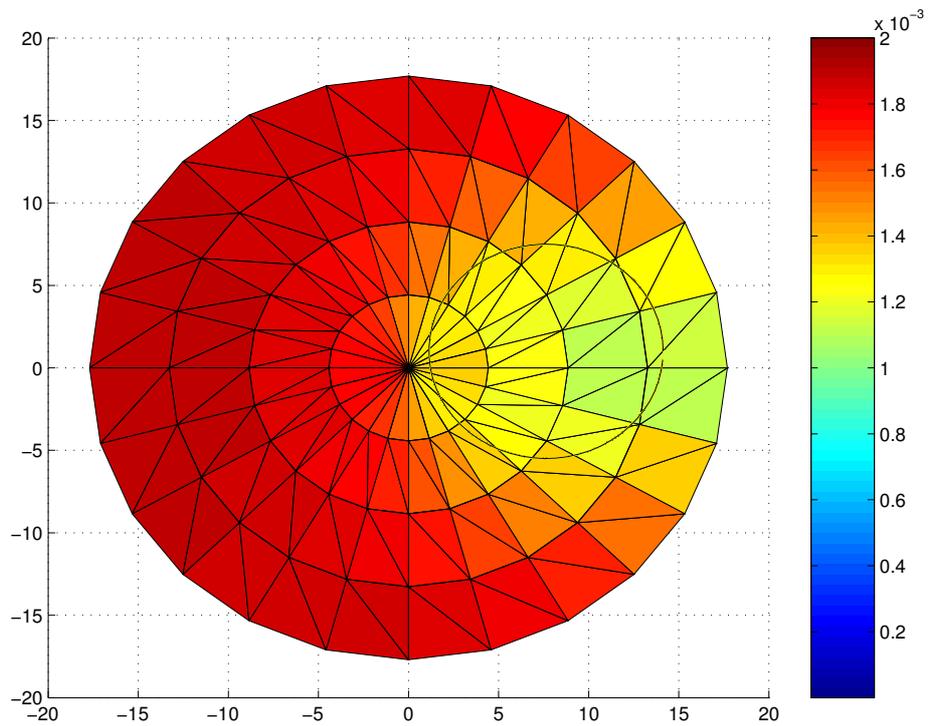


Figure 7: Rekonstruktion mit einfacher Schichten-Rückprojektion

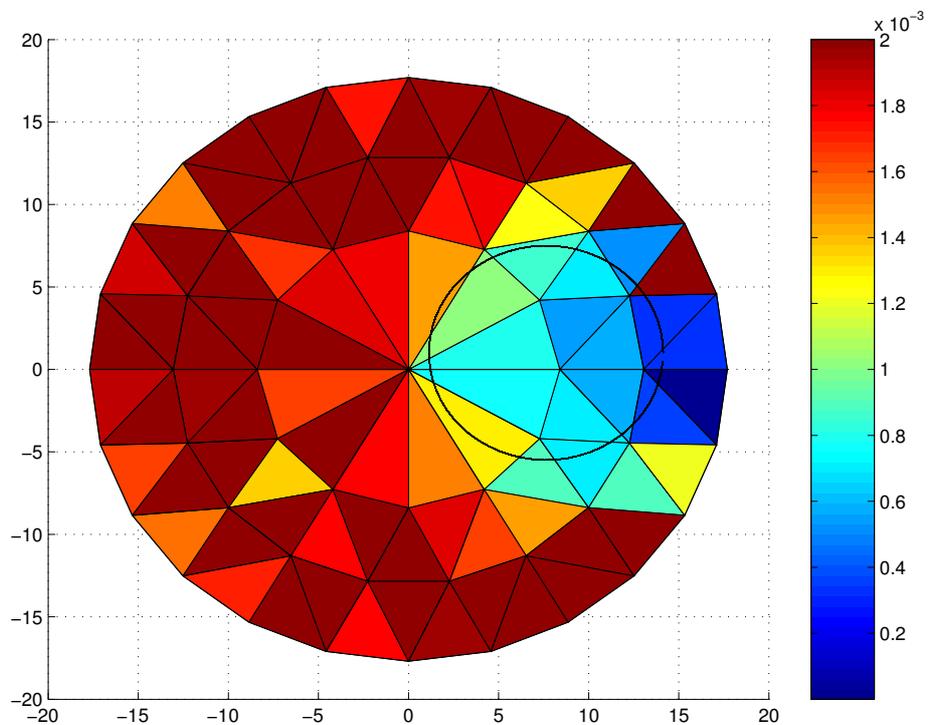


Figure 8: Rekonstruktion mit tomographischer Rückprojektion

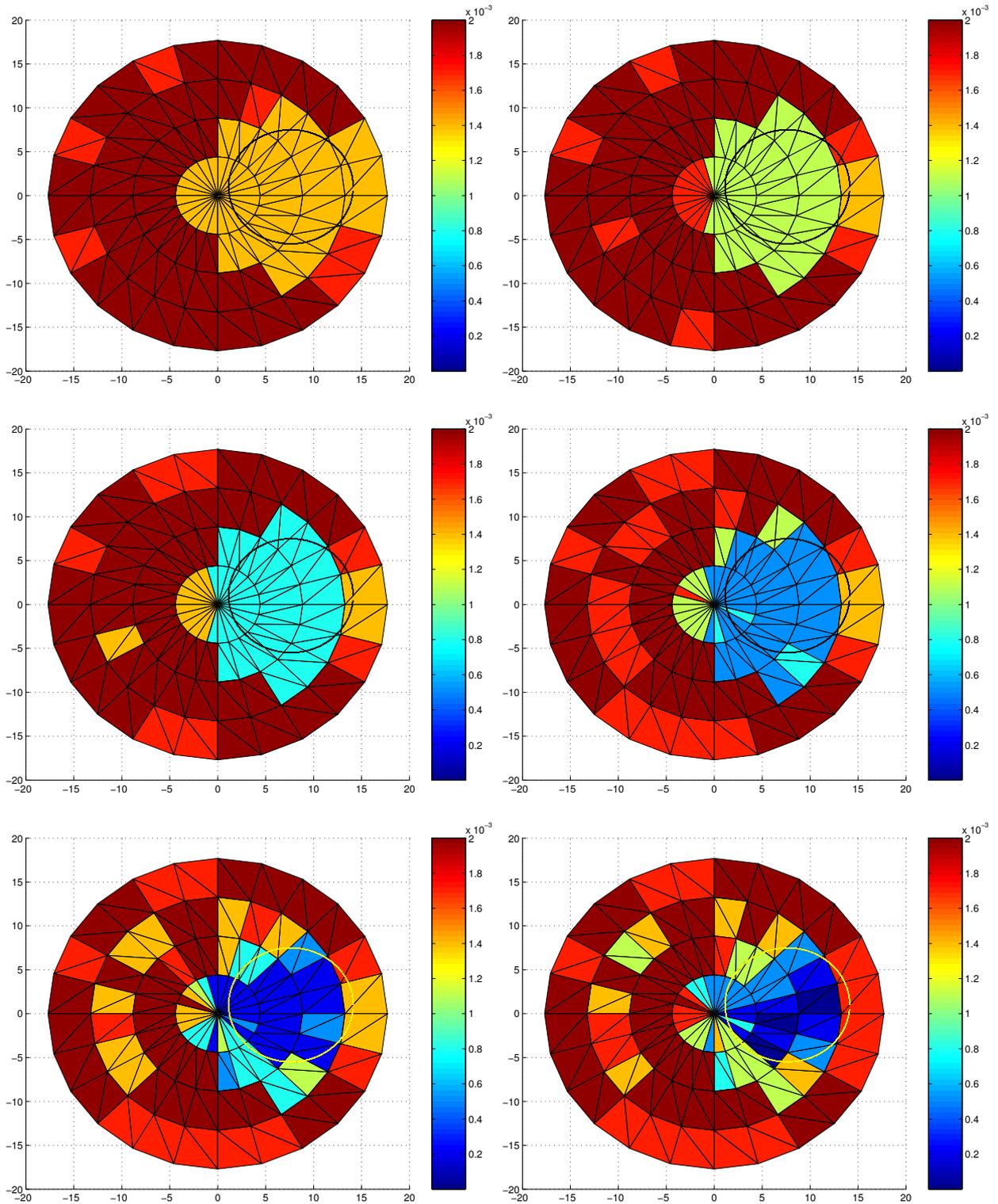


Figure 9: Rekonstruktion mit unserer Least-Square Methode von Iteration 1 bis 6